NOVAE
QVADRATVRAE
ARITHMETICAE

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

CIVITATIS BONONIAE
SENATORIBVS.

Bononiae, ex Typographia [illegible] Monti.
[illegible]

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ,

SEV

De Additione Fractionum:

PETRI MENGOLI
Art. & Phil. Doct.

Illustrissimis, & Sapientissimis
CIVITATIS BONONIÆ
SENATORIBVS.

Bononiæ, ex Typographia Iacobi Montij.
Superiorum permissu. 1650.

NOVÆ

QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ,

SEV

De Additione Fractionum:

PETRI MENGOLI

Art. & Phil. Doct.

Illustrissimis, & Sapientissimis

CIVITATIS BONONIÆ SENATORIBVS.

Bononiæ, ex Typographia Iacobi Montij.
Superiorum permissu. 1650.

ILLVSTRISSIMI PATRES

VEreor quin vestris auribus, Patres Amplıss. consona hęc numerorũ congeries dissonare videatur: at innumeris meritis innumeram numerorum seriem deberi quis denéget? Arenas maris, stellarum numerum, niuis exagonæ multitudinem examinandam contemnerẽ, dum vestræ fisus humanitati infinitum metiri minimè dubitaui. Fronti nunquam melior successit sudor, calamus potiori nunquam vndauit atramento, eo quod vestro nomini, meo veluti numini consecratur. Hæ meæ quæquæ sint, integritatis fractiones, quia minimæ sunt quantitatis, ipsum munus exile profitentur; quia verò in singulis dispositionibus

tionibus infinitæ colliguntur, vestræ non minus humanitatis, quàm obsequij mei numerant argumenta. Vester labor est, Patres Illustriss. dum meis lucubrationibus munificentissimo imperio laborastis: vester, inquam, labor est, cui vestri cætus, nostrique sæculi Apollo amplissimæ lucis impendium erogauit. Spinosa hæc Matheseos dumeta è rigidis acutissimæ artis spinis verecundiæ meæ rosas collecturi respicere ne dedignemini. Valete.

Illustriss. DD. VV.

Seruus humillimus
Petrus Mengolus.

PRÆFATIO

MEditanti mihi persæpe Archimedis parabolæ Quadraturam, propterquam infinita triangula in continuè quadrupla proportione existentia certos limites quantitatis non excedunt; occurrit vniuersalis illa Quadratura eiusdem argumenti occasione a Geometris demõstrata, qua magnitudines infinitæ continuam quamlibet proportionem maioris inæqualitatis possidentes in præfinitas homogeneas quantitates colliguntur. Admirabile sanè Theorema: cuius contemplatione in eam quæstionem inductus sum, vtrum magnitudines ea quacunq; lege disposita, vt aliqua possit assumi minor qualibet proposita, vel vt deficientes in infinitum euanescant, infinitæ compositæ omnem propositam quantitatem valeant superare.

In huiusmodi causa experimentũ Arithmeticas fractiones tẽtare agressus, eas ità disposui, vt singulas vnitates singulis post vnitatem nu-

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$

meris denominarem, in qua quidem dispositione sumi potest magnitudo minor qualibet assignata, & propterea ipsæ magnitudines ad ordinis incrementum quantitate decrescentes in infinitum euanescunt.

Causam igitur in assumptæ dispositionis terminis proponens quærebam, vtrum vnitates denominatæ singulis numeris post vnitatem in infinitum dispositæ, & aggregatæ infinitam aliquam, vel finitam componerent extensionem. Pro finita extensione respondendum videbatur; quòd numerorum, & fractionum contrariæ sint potestates, numerorum quidem in multiplicatione, qua magnitudines versus infinitum progrediuntur, fractionum verò in diuisione, qua res ad ipsa indiuisibilia reducitur: aggregati autem numeri superant quamlibet propositam quantitatē; ergo à contrario sensu aggregatæ fractiones non videntur posse quamlibet propositā magnitudinem excedere. Hoc sophisma toto ferè mense fuit expectatio-

nis

nis argumentum, quòd pro hac parte Geometricam in cauſa ferre poſſem ſententiam: atqui dum proceſſum demōſtrationis examino, iudicium in alterius partis fauorem conuertitur.

Ea eſt ratio, quia in propoſitis fractionibus æquales magnitudines numeris Arithmeticè diſpoſitis denominantur, & propterea tres conſequentes, vtpote A, B, C, ſunt Harmonicè diſpoſita, & A, ad C, eamdem habet proportionem, quam exceſſus, A, B, ad exceſſum B, C: eſt autem A, maior C; ergo exceſſus A, B, maior eſt exceſſu B, C; & aggregatum A, C, maius duplo B; & aggregatum ex ternis A, B, C, maius triplo mediæ B. Hoc igitur argumento fractiones in propoſita diſpoſitione ſumptæ ternæ à prima ſunt maiores

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\qquad \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\qquad \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\qquad \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\qquad \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}$$

triplis medijs: & mediæ ſunt vnitates denominatæ numeris à ternario multiplicatis $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$; *& earumdem tripla ſunt* 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, *quæ eodem, quo ſuprà argumento ternæ ſunt*

ma-

maiores triplis medijs. Ergo fractiones propositæ dispositionis aſsumptæ totidem ſemper ſecundum numeros proportionis continuè ſubtriplæ 3, 9, 27, 81, ſingulas vnitates excedunt. Poſſunt autèm ſumi, pro quouis aſsignato numero, totidem in continua proportione ſubtripla numeri à ternario, iuxtà quorum aggregatum ſumptæ fractiones dispoſitionis propoſitæ ipſum aſsignatam numerum ſuperabũt: Ergo propoſitæ fractiones in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ infinitam extenſionem valent implere.

Sit exempli gratia numerus aſsignatus 4: & ſumantur à ternario quatuor continuè proportionales in ſubtripla 3, 9, 27, 81, quorum ſumma 120: igitur ſumptæ fractiones in multitudine numeri 120 ſuperant aſsignatum numerum 4; nam tres primæ ſuperant triplum $\frac{1}{3}$, videlicet vnitatem: nouem deinceps ſuperant triplum aggregati $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, videlicet aggregatum $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; ſed huiuſmodi aggregatum ſuperat vnitatem, vt oſtendi; ergo nouem deinceps ſuperant vnitatem: & propter eam-

dem

dem demonstrationem 27, & 81 subsequentes singulas vnitates excedunt.

Hinc duo Corollaria processere. Primum, quòd eadem dispositio à quocunque ordinetur principio in infinitum extenditur; vtpote si dispositarum fractionum prima sit $\frac{1}{5}$, & aliæ deinceps adhuc ipsam dispositionem propositum

$$\frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\ \text{\&c.}$$

quemuis numerum superare posse: finitum enim est aggregatum ex ijs, quæ sunt omissæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, & finiti ab infinito subtractio finitum relinquere non potest.

Alterum, quòd infinitarum fractionum dispositio, in qua singulæ vnitates a singulis numeris Arithmeticè proportionalibus denominantur, pariter in infinitum extenditur. Fiat huiusmodi dispositio A, cuius primam fractionem denominet numerus B, & excessus Arithmeticè proportionalium sit C, & sub singulis fractionibus dispositionis A, ab eodem principio fiat dispositio D, fractionum, in quibus vnitates denominantur omnibus numeris

à B.

A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{14}$	B 2.
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	C 3.

à B. Quia primi denominatores in diſpoſitionibus A, D, ſunt æquales, alter minor eſt quàm vt ad alterum eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo ſecundus in diſpoſitione A, minor eſt quàm vt ad ſecundum in diſpoſitione D, eamdem habeat proportionem: ſunt autem fractiones eumdem habentes numeratorem in reciproca proportione denominatorum; ergo prima, ſecunda, & ſingulæ deinceps fractiones diſpoſitionis D, ſunt minores quàm vt ad primem, ſecundam, & ſingulas deinceps diſpoſitionis A, eamdem habeant proportionem, quam C, ad vnitatem; & colligendo, tota diſpoſitio D, minor eſt quàm vt ad totam diſpoſitionem A, eamdem habeat proportionem, quam C, ad vnitatem. Igitur ſi extenſionis A, quantitas aſsignatur; etiam eiuſdem extenſionis multiplam ſecundum numerum C, quantitatem neceſſe eſt aſsignari, quæ infinita extenſione D, ſit

maior;

maior; quod est absurdum, Ergo extensio infinitarũ fractionũ dispositionis A, est infinita.

Dimissis igitur hisce dispositionibus quantitatis iurisdictionem superantibus, eamdem contemplationem instituere capi de fractionibus, in quibus vnitates à numeris triangulis denominantur; an videlicet ipsæ etiam quadraturam excluderent, an potius paterentur: Factis ergo de more calculis, & instructa demonstratione, inueni dispositionis huiusmodi quadraturam esse vnitatem:

Vnitates denominatæ triangulis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$
quæ aggregatæ à prima sunt.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$

quòd aggregatæ quotlibet à prima sunt æquales numero multitudinis ipsarum denominato per numerum binario maiorem, & propterea semper vnitate sunt minores eo defectu, qui iuxtà multitudinis additarum fractionum incrementum infrà quălibet assignatam magnitudinẽ diminuitur, & in infinitũ euanescit.

Præterea in eadem dispositione bina sumpta post vnitatem singularum ab vnitate sunt di-

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{10}\ \frac{1}{15} \qquad \frac{1}{21}\ \frac{1}{28} \qquad \frac{1}{36}\ \frac{1}{45}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{20}$$

midiæ: ergo diuidendo, omnes post vnitatem, vnitati sunt æquales.

Tandèm si eiusdem dispositionis fractiones

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{28} \qquad \frac{1}{36}\ \frac{1}{45}\ \frac{1}{55}\ \frac{1}{66}\ \frac{1}{78}\ \frac{1}{91}\ \frac{1}{105}\ \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8}$$

totidem sumantur deinceps secundùm numeros proportionis continuè subduplæ à binario, videlicet 2, 4, 8, &c. aggregatæ sunt in continuè dupla proportione; atqui magnitudines duplæ proportionis aggregatæ infinitæ sunt æquales duplo primæ, cum in nostro casu prima sit dimidium vnitatis, ergo propositæ fractiones aggregatæ infinitæ sunt æquales vnitati.

Huiusmodi sunt, quæ in primo præsentis opusculi libro demonstraui de fractionibus, in quibus vnitates denominantur planis omniũ numerorum ab vnitate: quia enim singuli trianguli numeri singulorum huiusmodi planorum sunt dimidij, propter reciprocam pro-

por-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	

portionem singulæ fractiones, in quibus vnitates denominantur triangulis duplæ sunt singularum, in quibus denominantur planis; & ideò vtrique dispositioni eadem conueniunt demonstrationes.

Ab huius fractionum dispositionis contemtemplatione fæliciter expeditus, ad aliam progrediebar dispositionem, in qua singulæ vnitates numeris quadratis denominantur. Hæc speculatio fructus quidem laboris rependit, nondum tamen effecta est soluendo, sed ingenij ditioris postulat adminiculum, vt præcisam dispositionis, quam mihimetipsi proposui, summam valeat reportare.

Pro fructibus habētur huius opusculi Theoremata, ea præcipuè, quæ in primo libro demonstrantur, & præterea sequentes propositiones videlicet.

1. Vnitates denominatæ compositis ex quadratis

dratis ab vnitate, & lateribus eorumdem, dispoſita in infinitum, & aggregata ſunt æquales vnitati.

Quadrati	1	4	9	16	25
Latera	1	2	3	4	5
Compoſiti	2	6	12	20	30
Vnitates denominatæ compoſitis.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$

Conſtat enim, quòd ſingulæ fractiones huiuſce diſpoſitionis congruũt ſingulis, in quibus vnitates denominantur planis omnium numerorum ab vnitate.

2. Vnitates denominatæ compoſitis, ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem duplis, diſpoſita in infinitum, & aggregata ſunt æquales $\frac{3}{4}$

Quadrati	1	4	9	16	25	36
Laterũ dupli	2	4	6	8	10	12
Compoſiti	3	8	15	24	35	48
Vnitates denominatæ compoſitis.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$

Quia ſingulæ, quæ ſumuntur alterna à prima, congruunt ſingulis, quæ denominantur planis

omnium

omnium imparium ab vnitate, & idiò sunt æquales $\frac{1}{3}$. Alternæ verò à secunda congruunt singulis, quæ denominantur planis omnium parium à binario, & propterea sunt æquales $\frac{1}{4}$. Ergo colligendo, omnes sunt æquales $\frac{3}{4}$.

3. Vnitates denominatæ compositis ex quadratis ab vnitate, & lateribus eorumdem triplis dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{11}{18}$.

Quadrati	1	4	9	16	25
Laterum tripli	3	6	9	12	15
Compositi	4	10	18	28	40
Vnitates denominatæ compositis.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{40}$

Quia sumptæ à prima binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate cũ excessu 3, & propterea aggregatæ infinitæ sunt æquales $\frac{1}{3}$: Sumptæ autem à secunda binis relictis congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum à 2, cum eodẽ excessu 3, & sunt æquales $\frac{1}{6}$; Residuæ tandem congruunt vnitatibus, quæ denominantur planis

planis Arithmeticè dispositorum à 3. cum eodem excessu 3, & ideò sunt æquales $\frac{1}{9}$. Ergo omnes equales sunt aggregatis $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{9}$, videlicet $\frac{11}{18}$.

Et alia huiusmodi Theoremata, eadem pariter methodo demonstraui.

Ad propositam ergo Quæstionē redeo, cuius plura capita contrarias, vt ostendi, merentur sententias. Istorum autem duo solumodo in hoc opusculo mihi videor absoluisse; alterum de fractionibus, in quibus vnitates denominantur productis numerorum Arithmeticè dispositorum; alterum de ijs, in quibus differentiæ dispositorum quomodolibet numerorū eorumdem productis denominantur: præterea eadem in Geometricis quantitatibus demonstrari posse indicaui, præuia solumodò nominum interpretatione, quæ habetur in vltimis definitionibus libri tertij.

In aßumptis autèm capitibus quid questioni respondendum sit, ex sequentibus vnusquisque poterit iudicare.

NOVÆ

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ SEV De Additione Fractionum.

LIBER PRIMVS.

In quo tractatur de Fractionibus, quarum ſunt denominatores numeri plani.
Principales Additiones habentur in Propoſitionibus huius libri 7. 8. 13. 23. 37.
Quadraturæ verò in Propoſitionibus 17. 26. 40.

DEFINITIONES

I.

Differentiam duarum magnitudinum, quandò prima excedit ſecundam, voco, exceſſum primæ & ſecundæ.

II.

Quandò verò prima deficit à ſecunda, voco, defectum primæ, & ſecundæ.

III.

Similes differentias, voco, tùm excessus, tùm defectus inter se.

IV.

Dissimiles verò excessus defectibus.

V.

Magnitudines Arithmeticè dispositas, voco, quarum (sumptis continuè binis quibuslibet) differentiæ similes antecedentium, & consequentium sunt æquales.

VI.

Magnitudines Harmonicè dispositas, voco, quarum (sumptis continuè ternis quibuslibet) prima se habet ad tertiam, vt differentia primæ, & secundæ ad similem differentiam secundæ, & tertiæ.

Præterea suppono Lectorem informatum esse de ijs, quæ in Quinto, Septimo, Octauo, & Nono libris Elementorum Euclidis traduntur, quoad capescendas demonstrationes. Nam, quoad ipsas propositiones, & praxim numerosam, sufficit memoriæ mandasse præcepta logisticæ Fractionum, quæ passim penes Arithmeticos leguntur.

Theo-

Theorema 1. Propoſitio 1.

Trium Arithmeticè diſpoſitorum planum ſub extremis medium eſt Harmonicè inter plana ſub ſingulis extremis, & medio.

A. 3.	B. 5.	C. 7.
	D. 2.	
H. 6.		I. 14.
E. 15.	G. 21.	F. 35.

Sint Arithmeticè diſpoſiti tres A, B, C, quorum differentia D, & planum extremorum A C, ſit G, plana verò ſub ſingulis extremis, & medio A B, C B, ſint E, F. Dico quòd G, medium eſt Harmonicè inter E, F. Ex multiplicationibus D A, D C, producantur H, I; ergo vt A, ad C, ita eſt H, ad I: & quia E, F, ſunt plana B A, B C; ergo E, ad F, eſt vt A, ad C, vel vt H, ad I: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam B, C, producit ſimilem differentiam E, G; & multiplicando D, producit H; eſt autem D, differentia B, C: ergo H, eſt differentia E, G, ſimilis differentiæ B, C, vel differentię A, B: Similiter demonſtrabimus quòd I, eſt differentia G, F, ſimilis differentiæ A, B, vel E, G: ergo E, ad F, eſt vt differentia E, G, ad ſimilem differentiam G, F. Ergo G, medium eſt Harmonicè inter E, F. Quòd erat demonſtrandum. Def. 6.

Theorema 2. Propos. 2.

Trium Harmonicè dispositorum planum sub extremis medium est Arithmeticè inter plana sub singulis extremis, & medio.

A. 3.		B. 4.		C. 6.	
	H. 1.		I: 2.		
		D. 6.			
E. 12.		G. 18.		F. 24.	

SInt Harmonicè dispositi tres A, B, C, & planum extremorum A C, sit G, plana verò sub singulis extremis,& medio A B, C B, sint E, F. Dico quòd G, medium est Arithmeticè inter E, F. Sint H, & I, differentiæ similes A,B,& B, C; ergo vt A, ad C, ita est H, ad I, & productum A I, est æquale producto C H. Sit huiusmodi productum D: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam, B, C producit similem differentiam E, G; & multiplicando I, producit D; est autem I, differentia B, C; ergo D, est differentia E, G, similis differentiæ B, C, vel A, B: Similiter demonstrabimus quòd D est differentia G, F, similis differentiæ A, B, vel E, G: ergo differentiæ E, G, & G, F, sunt æquales, & similes. Ergo G, medium est Arithmeticè inter E, F. Quod, &c.

Def. 6. (margin, beside "les A,B,& B, C; ergo vt A, ad C...")

Def. 5. (margin, beside "differentiæ A, B, vel E, G...")

DEFINITIO VII.

Vnam magnitudinem altera denominatam, voco, quamlibet fractionem, in qua vna

ma-

magnitudo stat loco numeratoris, altera verò loco denominatoris.

Theor. 3. Propos. 3.

Eadem magnitudine tribus Harmonicè dispositis denominata fiunt fractiones Arithmeticè disposita.

	A. 1.	
B. 3.	C. 4.	D. 6.
E. $\frac{1}{3}$	F. $\frac{1}{4}$	G. $\frac{1}{6}$
H. 12.	K. 18.	I. 24.

DEnominetur A, magnitudo tribus Harmonicè dispositis B, C, D, vt fiant fractiones E, F, G. Dico, quòd E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Ex multiplicationibus C B, C D, B D, producantur H, I, K; ergo, quia B, C, D, sunt Harmonicè dispositi, K, medius est Arithmeticè inter H, I: & quia I, K, sunt producti D C, D B; ergo I, ad K, est vt C, ad B; & ex denominatione A, per C, & B, fiunt fractiones F, & E; ergo vt C, ad B, vel vt I, ad K, ita est E, ad F: Similiter demonstrabimus, quòd vt K, ad H, ita est F, ad G; ergo per conuersionem rationis, & ex æquo vt I, K, H, sunt Arithmeticè dispositi, sic fractiones E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Quod, &c.

DEFINITIO VIII.

Defferentias, & plana in aliqua dispositione, voco

voco absolutè, differentias, & plana magnitudinum, quæ sunt continuè consequentes in illa dispositione, prima videlicet, & secunda; secunda, & tertia; & sic deinceps vsque ad vltimam, si disposita sunt in aliqua multitudine; vel in infinitum, si disposita concipiuntur infinita.

Theor. 4. Propos. 4.

Factis duabus dispositionibus, prima quidem omnium numerorum ab vnitate, secunda verò omnium numerorum, quos assumptus aliquis numerus metitur ab assumpto; Vnitates denominatæ planis in prima, ad vnitates denominatas planis in secunda, singula ad singulas eiusdem ordinis, ita se habent, vt assumpti numeri quadratus ad vnitatem.

A.	1.		2.		E. 3.		4.		5.		6.		7.		8.
B.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$	
C.	3.		6.		F. 9.		12.		15.		18.		21.		24.
D.		$\frac{1}{18}$		$\frac{1}{54}$		$\frac{1}{108}$		$\frac{1}{180}$		$\frac{1}{270}$		$\frac{1}{378}$		$\frac{1}{504}$	

Sit

SIt omnium numerorum ab vnitate diſpoſitio A, & aſſumptus numerus E, cuius quadratus F; & ſit omnium numerorum, quos E, metitur ab E, diſpoſitio C; Sint etiam B, vnitates denominatæ planis in A; & D, vnitates denominatæ planis in C. Dico, quòd ſingulæ B, ad ſingulas D, eiuſdem ordinis, ita ſe habent, vt F, ad vnitatem. Quia numerus E, & vnitas æquè metiuntur numeros in C, & A, eiuſdem ordinis, vt ſinguli in C, ad E, ita ſinguli eiuſdem ordinis in A, ad vnitatem, & ſunt E, & vnitas homologæ ordinis eiuſdem numeris in A, & C; conuertendoque, & ex æquo binæ C, inter ſe ſunt vt binæ A, inter ſe, ſi ſumantur homologæ ordinis eiuſdem: ergo plani denominatores in ſingulis D, ad planos denominatores in ſingulis eiuſedm ordinis B, ſunt ſimiles, & duplicatam habent proportionem homologorum laterum videlicet numeri E, ad vnitatem, vel eamdem quã numerus F, ad vnitatem; ſed vt denominatores D, ad B, inter ſe, ita reciprocè ſunt vnitates denominatæ B, ad D, inter ſe: Ergo ſingulæ B, ad ſingulas eiuſdem ordinis D, ſunt vt F, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 5. Propoſ. 5.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima.

SIt A, ſeries omnium numerorum ab vnitate, & B, ſint vnitates denominatæ planis in A. Dico, quòd binæ B, à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima. Sit C, ſeries omnium numerorum à binario, quos binarius metitur,

A.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
B.		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$
C.		2.		4.		6.		8.
D.			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{48}$	

titur; & D, ſint vnitates denominatæ planis in C; ergo ſingulæ B, à prima ad ſingulas D, à prima ſunt vt 4. binarij quadratus ad vnitatem: & quoniam in A, ſunt omnes numeri ab vnitate, ſunt inter numeros A, à binario, qui eſt ſecundo loco, omnes C, à primo, interpoſitis tamen ſingulis Arithmeticè medijs, quos binarius non metitur; ergo ſinguli plani denominatores vnitatum D, à prima medij ſunt Harmonicè inter binos denominatores B, à ſecunda; ergo ſingulæ D, à prima mediæ ſunt Arithmeticè inter binas B, à ſecunda; & propterea ſingulæ D, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt dimidiæ, videlicet, vt vnitas ad 2: Ergo ex æquo ſingulæ B, à prima ad binas B, à ſecunda ſunt vt 4. ad 2; & conuertendo binæ à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularū à prima. Quod, &c.

Prop. 4.
Prop. 1.
Prop. 3.

Theor. 6. Propoſ. 6.

Differentia laterum plano denominata eſt diſſimilis differentia vnitatum ſingulis lateribus denominatarum.

SInt latera A, B, quorum differentia C, denominetur plano D, vt fiat fractio E; & denominata vnitate per B, & A, fiant fractiones F, & G; & ſit C, exceſſus A, B. Dico quòd E, eſt defectus F, G. Quia F, eſt vnitas deno-

A. 5. C. 2. B. 3.

D. 15.

F. $\frac{1}{5}$ E. $\frac{2}{15}$ G. $\frac{1}{3}$

nominata per A, ex multiplicatione F A, producitur vnitas; & ex multiplicatione vnitatis, & B, producitur B; ergo ex mutua multiplicatione F A B, producitur B; est autem D, planum A B; ergo ex multiplicatione F D, producitur B. Similiter demonstrabimus, quod ex mlutiplicatione G D, producitur A. Cum igitur ex multiplicationibus G, & F, in D, producantur A, & B; ergo ex multiplicatione excessus G, F, in D, producitur excessus A, B, videlicet C; Sed quia E, fractio est ex denominatione C, per D; ergo etiam ex multiplicatione E, in D, producitur C; ergo E, est æqualis excessui G, F: ergo E, est defectus F, G. Quod, &c.

DEFINITIO IX.

Coutinuam magnitudinum dispositionem, voco, cum differentiæ antecedentium, & consequentium sunt similes.

Theor. 7. Prop. 7.

Differentiæ denominatæ planis in continua dispositione simul sumptæ sunt æquales vni differentiæ denominatæ plano extremorum.

A. 2. B. 4. C. 5. D. 9.

E. $\frac{2}{8}$ F. $\frac{1}{20}$ G. $\frac{4}{45}$

H. $\frac{7}{18}$

I. $\frac{1}{2}$ K. $\frac{1}{4}$ L. $\frac{1}{5}$ M. $\frac{1}{9}$

Sint A, B, C, D, aliquot magnitudines continuæ dispositionis in qua differentiæ planis denominatę sint fractiones E, F, G, Differentia verò denominata plano extremorum A, D, sit fractio H. Dico, quòd E, F, G, simul sumptæ sunt æquales H. Denominentur singulæ vnitates lateribus A, B, C, D, vt fiant fractiones I, K, L, M. Quoniam E, est differentia denominata plano A B, & I, K, sunt vnitates denominatæ lateribus A, B; æqualis est E, differentiæ I, K, quæ dissimilis est differentiæ A, B. Similiter demonstrabimus F, G, H, æquales esse differentijs K, L, L, M, I, M, quę sunt dissimiles differentijs B, C, C, D, A, D; vnde quia differentiæ in dispositione A, B, C, D, sunt similes, etiam differentię in dispositione I, K, L, M, sunt similes; & propterea simul sumptæ sunt æquales differentiæ I, M, vel fractioni H: Atqui colligendo differentiæ in dispositione I, K, L, M, sunt ęquales fractionibus E, F, G, simul sumptis. Ergo fractiones E, F, G, simul sumptę sunt ęquales H. Quod, &c.

Def. 6.

Def. 5;

Theor. 8. Propos. 8.

Vnitates denominata planis in Arithmetica dispositione sunt ad vnitatem plano extremorum denominatam vt numerus multitudinis ipsarum ad vnitatem.

Sint

A. 2. B. 5. C. 8. D. 11. N. 3. O. 9.
E. $\frac{1}{10}$ F. $\frac{1}{40}$ G. $\frac{1}{88}$ H $\frac{1}{22}$
I. $\frac{3}{10}$ K $\frac{3}{40}$ L $\frac{3}{88}$ M. $\frac{9}{22}$

SInt A,B,C,D, in Arithmetica dispositione, cuius planis denominatę singulę vnitates sint fractiones E,F, G, & vnitas denominata plano extremorum A D, sit H. Dico quòd E, F, G, ad H, sunt vt numerus multitudinis E,F,G, ad vnitatem. Sit N, differentia semper eadem in dispositione, quę planis denominetur, vt fiant fractiones I,K,L,& sit O, differentia extremorum A,D, quę plano denominetur, vt fiat fractio M. Igitur facti sunt I,K,L, ęquales M. Et quia E, F, G, & I, K, L, eosdem habent denominatores, numerator verò communis ipsarum E, F, G, est vnitas,& factorum I, K, L, est N; ergo tùm singulæ, tùm collectæ E,F,G, ad I,K,L, vel ad M, sunt vt vnitas ad N. Pariter quia M, H, eundem habent denominatorem, nnmerator verò M, est O, & ipsius H, est vnitas; ergo M, ad H, est, vt O, ad vnitatem; & ex ęquo in perturbata collectæ E, F, G, ad H, sunt, vt O, ad N: Cum autem A,B,C,D, sint Arithmeticè dispositi, est O, differentia extremorum ad N, differentiam consequentium ita multiplex, vt numerus multitudinis E, F, G, ad vnitatem. Ergo E, F, G, ad H, sunt, vt numerus multitudinis F, F, G, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 7.

Theor. 9. Propos. 9.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate terna à tertia sunt pars tertia singularum à prima.

A.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	
C.			3.			6.			9.
D,				$\frac{1}{18}$			$\frac{1}{54}$		

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A. Dico ternas B, à tertia, tertiam esse partem singularum à prima. Ordinentur omnes numeri C, à ternario, quos idem metitur, & D, vnitates denominatæ planis C: Et quoniam A, sunt omnes numeri, etiam inter numeros A, à ternario, qui est tertio loco, sunt omnes C, à prmo, binis medijs Arithmeticè semper interpositis, quos ternarius non metitur. Prop. 8. Ergo ternæ vnitates B, à tertia (denominatæ planis quatuor dispositorum Arithmeticè à numeris C, qui sunt inter numeros A,) ad singulas vnitates D, (denominatas planis numerorum C, qui eorumdem quatuor semper sunt extremi) à prima sunt, vt idem ternarius, numerus videlicet magnitudinum, quæ ternæ sumuntur ad vni- Prop. 4. tatem. Singulæ autem D, à prima ad singulas B, à prima sunt, vt unitas ad 9, quadratum ternarij: Ergo ex æquo ternæ B, à tertia sunt ad singulas B, à prima, ut 3. ad 9. nempe pars tertia. Quod, &c.

Theor. 10. Propos. 10.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, quaternæ à quarta sunt pars quarta singularum à prima.

Prop. 5. NAm quia binæ a secunda sunt dimidiæ singularum a prima, binę à quarta sunt ad singulas à secunda,

vt

vt vnitas ad 2. & colligendo quaternæ à quarta sunt ad binas à secunda, vt vnitas ad 2. & binę à secunda sunt ad singulas à prima, vt vnitas ad 2. vel, vt 2. ad 3. Ergo ex æquo quaternæ à quarta ad singulas à prima sunt vt vnitas ad 4. videlicet pars quarta. Quod, &c.

Eadem huius, & præcedentis demonstrationum methodo possunt singuli sequentis Theorematis casus demonstrari, videlicet, Vnitates denominatas planis omnium numerorum ab vnitate quinas à quinta partem esse quintam singularum à prima, senas à sexta partem sextam, septenas à septima partem septimam, & sic deinceps; ex quorum inductione postea patefiat ipsius veritas conclusionis: ne tamen scrupulosum Geometram dubitare contingat, generali superinde factæ propositioni vnica satisfaciam demonstratione, vt infra.

Theor. 11. Propos. 11.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate sumptæ totidem ab vna ipsarum secundum numerum ordinis eiusdem, sunt pars ab eodem numero denominata singularum à prima.

ORdinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A, quarum F, assumpta, & inter numeros A, sit eiusdem F, numerus ordinis E, Dico B, sumptas ab F, semper totidem secundum numerum E, partem esse denominatam ab E, singularum B, à prima. Ordinentur ab E, omnes numeri C, quos E, metitur,

A. 1.	2.	E. 3.	K. 4.	L. 5.	H. 6.	M. 7.	N. 8.	I. 9.
B. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	F. $\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	
C		3.			6.			9.
D.			$\frac{1}{18}$			$\frac{1}{54}$		

tur, & D, vnitates denominatæ planis numerorum C. Quoniam A, sunt numeri ab vnitate, sunt etiam inter numeros A, ab E, qui est in eiusdem ordinis loco, omnes numeri C, à primo, qui sint E, H, I, interpositis totidem semper medijs Arithmeticè, secundum numerum vnitate minorem E. Sint numeros E, H, interpositi K, L, & numeros H, I, totidem interpositi M, N, secundum numerum vnitate minorem E; Coassumptis ergò hinc inde semper duobus eorum, quos E, metitur, fiunt singulæ dispositiones Arithmeticæ numerorum E, K, L, H, & H, M, N, I, totidem semper, secundum numerum vnitate maiorem E, quarũ planis denominatæ vnitates sunt ipsæ B, sumptæ totidem ab F, secundũ numerũ E, quæ ad singulas vnitates D, à prima denominatas planis extremorũ
Prop. 8. earũdem dispositionum, qui sunt numeri C, ita se habẽt, vt E, numreus multitudinis totidem sumptarum ab F, ad
Prop. 4. vnitatem; Singulæ autem D, à prima, ad singulas B, à prima sunt, vt vnitas ad quadratum E: ergo ex æquo sumptæ B, ab F, semper totidem secundum numerum E, ad singulas B, à prima sunt, vt E, ad suum quadratum; Sed E, cum suum quadratum metiatur per se ipsum, sui quadrati pars est a se ipso denominata. Ergo sumptæ B, ab F, semper totidem secundum numerum E, sunt pars ab eodem E, denominata, singularum B, à prima. Quod, &c.

Theor-

Theor. 12. Propos. 12.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate, sumptæ à prima totidem semper secundum numeros proportionis continuè subduplæ ab vnitate sunt in proportione continuè dupla.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{42}$ $\frac{1}{56}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$

VNitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate prima sit A, duarum sequentium aggregatum B, quatuor sequentium aggregatum C, & deinceps totidem huiusmodi vnitatum secundum numeros proportionis continuè subduplæ sumantur aggregata. Dico A, B, C, esse in proportione continuè dupla. Quia binæ à secunda sunt dimidiæ singularum à prima, B, subduplum est ipsius A, & eadem ratione, quia quaternæ à quarta sunt dimidiæ binarum a secunda, C, subduplum est ipsius B, & eadem semper demonstratione, quodlibet aggregatum subduplum est præcedentis. Ergo conuertendo A, B, C, sunt in proportione continuè dupla. Quod, &c. Prop. 5.

Theor.

Theor. 13. Prop. 13.

Vnitatum, quæ denominantur planis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt æquales numero ipsarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem.

A. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	D. 8.	E. 9.
B. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	

SInt A, numeri ab vnitate, & B, quotlibet vnitates à prima earum, quæ denominantur planis numerorum A. Dico B, aggregatas æquales esse numero multitudinis ipsarum B, denominato per numerum vnitate maiorem. Sint D, E, numeri quorum plano denominatur vltima ipsarum B. Et quoniam sunt dispositi ab vnitate omnes numeri A, quorum consequentium defectus sunt singulæ vnitates, quæ planis eorumdem denominatæ sunt B; Igitur B, aggregatæ sunt æquales defectui extremorum vnitatis, & E, per eorumdem planum denominato. Est autem D, defectus vnitatis, & E, & eorumdem planus idem E: Ergo B, sunt ęquales D, denominato per E. Sed cum numeri A, sint omnes ab vnitate, numerus E, est multitudinis numerorum A, vsque ad E, & D, vnitate minor, quam E, numerus multitudinis ipsarum B. Ergo vnitates B, aggregatæ sunt ęquales numemero ipsarum multitudinis denominato per numerum vnitate maiorem. Quod, &c.

Prop. 7.

Co-

Corollarium.

Vnde constat, quod vnitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum quotlibet assumptæ à prima sunt minores vnitate.

Problema primum. Propos. 14.

Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri ad numerum vnitate maiorem.

A.47.	B.53.	C.6.
E.8	F.9.	D.48.

Sit proportio data minoris inęqualitatis A, ad B. Oportet alteram inuenire maiorem proportione A, ad B, quæ sit numeri ad numerum vnitate maiorem. Sit C, excessus B, A, & D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat D, non esse æqualem A; alias C, metiretur etiam A, & metitur se ipsum; ergo metiretur compositum ex C, A, videlicet B, & non esset D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat etiam D, non esse minorem A; quia sequeretur idem, vel maius absurdum; ergo D, maior est A; & D, ad C, maiorem habet proportionem A, ad C. Sit E, numerus, per quem C, metitur D, & E, auctus vnitate fiat F; ergo D, ad C, est, vt E, ad vnitatem; ergo E, ad vnitatem maiorem habet proportionem A, ad C; & componendo E, ad F, maiorem habet proportionem A, ad B; & est numerus F, vnitate maior, quàm E. Quod facere opporebat.

Axioma Primum.

Quando infinitæ magnitudines infinitæ sunt extensionis, possunt in aliqua multitudine sumi, vt superent quamlibet propositam extensionem.

Theor. 14. Propos. 15.

Quando in ordine magnitudinum in infinitum dispositarum, quotlibet assumptæ à prima sunt minores vna eadem proposita magnitudine generis eiusdem, omnes à prima in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt extensionis finitæ.

A —— —— —— D —— —— ——

Sint in extensione A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quarum quotlibet assumptæ à pri-

prima ſint minores D, generis eiuſdem. Dico extenſionem A, eſſe finitam: alias erit infinita, & ſumptæ in aliqua multitudine magnitudines diſpoſitæ in A, à prima ſuperabunt quamlibet propoſitam extenſionem D, contra hipotheſim: non eſt igitur A, extenſionis infinitæ, ſed finitæ. Quod, &c. Ax. 1.

Corollarium.

Colligitur ex his quòd vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt extenſionis finitæ. Corol. Prop. 13.

DEFINITIO X.

Magnitudines dicuntur implere propoſitam extenſionem, quando exiſtentes infinitæ ſunt extenſionis minoris propoſitæ; vel quando exiſtentes finitæ, ita ſunt minores propoſitæ, vt vna alia magnitudine adiecta in earumdem ordine continuato proxima, fiant extenſionis maioris propoſitæ.

Axioma Secundum.

Quando infinitæ magnitudines finitæ ſunt extenſionis, & ſingulæ magnitudines eadem *in infinitum concipiuntur in vna, & altera extensione disponi, & aggregari, congruit vna extensio alteri.*

Theor. 15. Propos. 16.

Quando magnitudines à prima disposita in infinitum, & aggregata sunt extensionis finita, sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem maiorem quidem prima, minorem tamen extensione omnium.

A ——— B ——— C ———

SIt A, extensio finita magnitudinum, quę à prima dispositæ in infinitum,& in ea sunt aggregatæ,& sit proposita extensio B,maior quidem prima dispositarum in A,minor tamen ipsa extensione A,& ex magnitudinibus in A, dispositis assumptæ à prima, & eodem ordine dispositæ in C, impleant B. Dico, quod assumptæ in in C, sunt in aliqua multitudine: alias assumptæ in C, quæ implent B, sunt infinitæ; igitur in extensione B, sunt dispositæ eodem ordine in infinitum, & aggregatæ
Ax. 2. magnitudines,quæ pariter in extensione A; & sunt ambo A, B, extensiones finitæ; congruit ergo B, extensioni A, minor maiori; quod est absurdum. Ergo assumptæ in C, quæ implent B,non sunt infinitæ, sed in aliqua multitudine. Quod, &c.

Theor.

Theor. 16, Propos. 17.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt æquales vnitati.

A ——— B ——— C ———
D ——— E ———

Sint in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem esse vnitati: alias erit A, maior, vel minor vnitate. Sit maior, igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima vnitates in A, dispositæ implent vnitatem. Sit huiusmodi multitudininis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C: ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sumptę in multitudine numeri C, sunt maiores vnitate, quod est absurdum. Non est igitur A, maior vnitate. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad vnitatem, inueniatur altera maior, quæ sit numeri D, ad E, vnitate maiorem; & aliquot vnitates in A, dispositæ sumantur à prima in multitudine numeri D; quæ cum sint æquales numero D, denominato per E, habebunt ad vnitatem eamdem proportionem, quam D, ad E, maiorem videlicet, quam A, ad vnitatem: Ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sunt maiores omnibus in infinitum dispositis, pars toto; quod est absurdum. Non igitur A, minor est vnitate; sed neque maior. Ergo A, æqualis est unitati. Quod, &c.

Prop. 16.
Def. 10.
Corol.
Prop. 13.
Prop. 14.
Prop. 13.

Aliter;

Aliter.

Prop. 5. QVia binæ vnitatum diſpoſitarum in A, à ſecunda ſunt dimidiæ ſingularum à prima; colligendo, omnes à ſecunda ſunt dimidiæ omnium à prima; & diuidendo, omnes à ſecunda ſunt æquales primæ; eſt autem prima dimidium vnitatis; Ergo omnes à prima ſunt æquales vnitati. Quod, &c.

Prop. 13.

Aliter eadem Methodo.

Prop. 9. QVia diſpoſitarum in A, ternæ à tertia ſunt pars tertia ſingularum à prima; colligendo, omnes à tertia ſunt pars tertia omnium à prima; & diuidendo, omnes à tertia ſunt dimidiæ duarum præcedentium; ſunt autem duæ præcedentes æquales 2. denominato per 3: igitur omnes à tertia ſunt æquales vnitati denominatæ per 3. Ergo colligendo, omnes diſpoſitæ in A, ſunt æquales 3. denominato per 3. videlicet vnitati. Quod, &c.

Prop. 13.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatum denominatarum planis omniũ numerorum ab vnitate, qualibet aſſumpta, ſumma ſuccedentium in infinitum, & ſumma præcedentium, & aſſumpta ſunt continuè proportionales, vt vnitas ad numerum ordinis aſſumpta.

Vni-

D. 5. E. 6.
C ——— A . B ———

VNitatum denominatarum planis omnium numerorum ab vnitate sit A, quęlibet assumpta, cuius ordinis numerus D; Sitque B, summa succedentium in infinitum, & C, summa præcedentium, & assumptæ A. Dico A, B, C, esse continuè proportionales, vt vnitas ad D. Sit E, numerus vnitate maior D: quia D, est numerus ordinis A, est etiam numerus multitudinis aggregatarum in C; igitur C, est æqualis D, denominato per E; aggregatum vero ex C, B, est æquale vnitati; ergo C, ad aggregatum ex C, B, est vt D, denominatus per E, ad vnitatem, videlicet vt D, ad E; & diuidendo, C, ad B, est vt D, ad vnitatem; quapropter C, ad B, est. vt D, denominatus per E, ad vnitatem pariter denominatam per E; ergo B, æqualis est vnitati denominatæ per E. Quia etiam D, est numerus ordinis A; & E, inter omnes numeros ipsi D, proximus vnitate maior; constat, quod A, est vnitas denominata plano D E; sed vnitas denominata per E, ad vnitatem denominatam plano D E, est vt planum D E, ad E; vel (diuidendo per E,) vt D, ad vnitatem; ergo B, ad A, est vt D, ad vnitatem. Sunt ergo continuè proportionales C, B, A, vt D, ad vnitatem; & conuertendo, A, B, C, sunt continuè proportionales vt vnitas ad D. Quod, &c. Prop. 13. Prop. 17.

Theor. 18. Prop. 19.

Factis duabus Arithmeticis dispositionibus prima ab vnitate, altera ab aßumpto numero,

mero, eorum videlicet numerorum, quos aßumptus metitur per ſingulos in prima diſpoſitos; vnitates denominatæ planis omnium numerorum primæ, ad vnitates denominatas planis omnium numerorum alterius diſpoſitionis ordinis eiuſdem, ita ſe habent, vt aſſumpti numeri quadratus ad vnitatem.

A. 1.	3.	5.	7.	9.	11.	
D.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{99}$	
		B. 2.				
C. 2.	6.	10.	14.	18.	22.	
E.	$\frac{1}{12}$.	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{396}$	
		F. 4.				

SIt diſpoſitio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & B, numerus aſſumptus; à quo ſit diſpoſitio numerorum C, quos B, metitur per numeros A, eiuſdem ordinis; vnitates autem denominatæ planis numerorum A, & C, ſint D, & E; & numeri B, quadratus F. Dico D, ad E, ordinis eiuſdem eſſe, vt F, ad vnitatem. Quia B, metitur numeros C, per A, eiuſdem ordinis, vt ſunt numeri A, ad vnitatem, ita C, eiuſdem ordinis ad B; & ſunt numeri A, & C, ordinis eiuſdem homologi vnitatis, & B; & eadem ratione, vt vnitas ad numeros A, ita B, ad C, ordinis eiuſdem; ergo ex æquo numeri A, inter ſe ſunt vt C, eorumdem ordinum inter ſe; & plani eorumdem ordinum numeris A, & C, contenti ſunt ſimiles; ergo denominatores D, ad eiuſdem ordi-

nis

nis denominatores E, sunt similes; & duplicatam proportionem habent homologorum laterum vnitatis, ad B; videlicet eamdem, quam vnitas ad F; Ergo D, ad E, ordinis eiusdem sunt reciprocè, vt F, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 19. Prop. 20.

Factis duabus Arithmeticis dispositionibus prima ab vnitate, secunda vero ab assumpto in prima, eorum, quos assumptus metitur per singulos primæ; Omnes numeri secundæ sunt in prima, totidem semper interiectis, quot vnitatum est aßumptus vna dempta.

A.	1.	3. B. 5.	7.	9.	11.	13.	
D.	5.	15.	25.	35.	45.	55.	65.
				C. 4.			
E.	4.	12.	20.	28.	36.	44.	52.

SIt dispositio Arithmetica numerorum A, ab vnitate; & inter numeros A, assumptus B; à quo fiat dispositio Arithmetica numerorum, quos idem B, metitur per singulos A. Dico numeros D, esse inter numeros A, totidem semper interpositis, quot sunt vnitates in B, vna minus. Sit C, excessus B, & vnitatis; & disponantur numeri E, qui sint excessus binorum D, & A, eiusdem ordinis. Quoniam B, metitur numeros D, per A, eiusdem ordinis; eſt vnitas ad B, vt numeri A, ad D; & diuidendo, eſt vnitas ad C, vt numeri A, ad E; igitur E, ſunt multiplices numeri C; & quia C, exceſſus B, & vnitatis magnitudinum, quæ ſunt inter numeros A, vel æqualis eſt, vel multiplex exceſſui conſequentium eorundē A; ergo numeri E, ſunt multiplices exceſſui conſequentium A; & ſunt numeri E, exceſſus numerorum D, A; ergo numeri D, ſunt inter numeros A. Præterea, quia numeri A, metiuntur numeros D, per B; igitur exceſſus conſequentium A, metitur exceſſum conſequentium D, per B; ſed inter extremas mediæ Arithmeticè totidem interponuntur, quoties exceſſus conſequentium exceſſum extremarum metitur vna minus; Ergo numeri D, ſunt inter numeros A, totidem ſemper interpoſitis numeris A, quot ſunt vnitates in B, vna minus. Quod, &c.

Theor. 20. Prop. 21.

Vnitates denominatæ planis numerorũ Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, ſumptæ ſemper totidem ab aſſumpta, quot vnitatum eſt numerus inter Arithmeticè diſpoſitos eiuſdem ordinis cum aſſumpta, ſunt ad ſingulas à prima, vt vnitas ad eumdem numerum.

SInt numeri A, Arithmeticè diſpoſiti ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum

A.	1.	D. 3.	5.	7.	9.	11.
B.	$\frac{1}{3}$	C. $\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{99}$	
E.	3.	9.	15.	21.	27.	33.
F.	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{135}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{567}$	$\frac{1}{891}$	

rum vna C, aſſumpta, & inter numeros A, ſit D, ordinis eiuſdem. Dico B, ſumptas à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima eſſe vt vnitas ad numerum D. Diſponantur Arithmeticè numeri E, à D, quos D, metitur per numeros A, & ſint F, vnitates denominatæ planis numerorum E: conſtat, quod omnes numeri E, ſunt inter numeros A, à D, totidem ſemper interpoſitis ex reliquis numeris A, quot ſunt vnitates in D, vna dempta; ergo numerorum A, inter binos numeros conſequentes E, ſingulæ ſiunt arithmeticè diſpoſitiones numerorum, quorum planis denominatæ vnitates B, ſunt à C, totidem ſemper, quot ſunt numeri intermedij vno amplius, videlicet, quot ſunt vnitates in D; & ad ſingulas F, à prima denominatas plano extremorum, qui ſunt E, ſe habent, vt numerus multitudinis earum, quæ totidem ſemper ſumuntur, videlicet numerus D, ad vnitatem: ſunt autem ſingulæ F, à prima ad ſingulas B, à prima, vt vnitas ad quadratum aſſumpti D, ergo ex æquo vnitates B, totidem ſemper ſumptæ à C, ſecundum numerum D, ad ſingulas eaſdem B, à prima ſunt, vt numerus D, ad ſui quadratum, videlicet, vt vnitas ad D. Quod, &c.

Prop. 20.

Prop. 8.

Prop. 19.

Theor. 21. Prop 22.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, sumptæ à prima secundum numeros proportionis continuè submultiplicis ab vnitate, ad numerum sibi proximum in Arithmetica dispositione, sunt in eadem continuè multiplici proportione.

A. 1.	B. 3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{143}$	$\frac{1}{195}$	$\frac{1}{255}$	$\frac{1}{323}$
D.	$\frac{1}{3}$	E. $\frac{1}{9}$			F. $\frac{1}{27}$				G. $\frac{1}{81}$

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi ab vnitate, quorum B, proximus vnitati; & sint C, vnitates denominatæ planis numerorum A; & segregentur C, vt prima sit D, & à secunda totidem, quot sunt vnitates in B, sint E; & aliæ toties totidem sint F; & quot sunt F, toties totidem secundum numerum B, sint G, & sic deinceps: constat C, ita segregatas esse in D, E, F, G, vt sumptæ sint secundum numeros proportionis continuè submultiplicis ab vnitate ad B. Dico D, E, F, G, esse in eadem continuè multiplici proportionę numeri B, ad vnitatem.

Prop. 21. Quia B, est secundo loco Arithmeticè dispositorum, singulæ C, à prima ad totidem semper sumptas à secunda secundum numerum B, sunt vt B, ad vnitatem; ergo

Prop. 21. D, ad E, est vt B, ad vnitatem. Item singulæ in E, ad to-

totidem ſecundum numerum B,ſumptas in F, ſunt vt B, ad vnitatem; & quot ſunt ſingulæ in E, toties totidem ſecundum numerum B,ſunt in F; ergo colligendo omnes E, ad omnes F, ſunt vt B, ad vnitatem. Similiter demonſtrabitur omnes F, ad omnes G, eſſe vt B,ad vnitatem, & ſic deinceps. Ergo D, E, F,G, ſunt in continuè multiplici proportione numeri B,ad vnitatē. Quod,&c.

Theor. 22. Prop. 23.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aggregatæ à prima ſunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum eiuſdem, & exceßus diſpoſitionis Arithmeticæ auctum ſemper vnitate.

A. 1. 3. 5. 7. E. 9.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{63}$

D. 4. F. 8.

G. $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{2}{35}$ $\frac{2}{63}$

SInt numeri A, diſpoſiti Arithmeticè ab vnitate,quorum exceſſus B; Sint etiam C, vnitates denominatę planis numerorum A, aſſumptæ à prima ſecundum numerum D; & inter numeros A, poſt vnitatem numeri totidem ſumantur,& ſumptorum ſit extremus E; & ſit F, exceſſus E,& vnitatis: conſtat F, ad B, eſſe ut D, multitudo

titudo numerorum A, post unitatem ad ipsam vnitatem: igitur D, multiplicando B, facit F, qui auctus vnitate sit E. Dico C, æquales esse D, denominato per E. Ex denominatione B, per plana numerorum A, vsque ad E, fiant fractiones G, totidem, quot sunt C. Quia B, est excessus consequentium A, & F, extremorum, & E, pla-
Prop. 7. num extremorum, videlicet vnitatis, & E; sunt G, æquales F, denominato per E: Sunt autem G, ad C, vt B, ad vnitatem; & vt B, ad vnitatem, ita est F, ad D, uel F, denominatus per E, videlicet G, ad D, pariter denominatum per E; ergo G, ad C, sunt ut G, ad D, denominatum per E; ergo C, sunt æquales D, denominato per E. Quod, &c.

Theor. 23. Prop. 24.

Vnitatès denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate quotlibet aggregatæ à prima sunt minores vnitate denominata excessu consequentium dispositionis Arithmeticæ.

C. $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$
B. 2.	D. 4.	E. 8.	F. 9.

Sint C, quotlibet unitates denominatæ planis numerorum arithmeticè cum excessu B, dispositorum ab vnitate, sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse vnitate denominata per B. Ex ductu B, in D, fiat E; & F, vnitate maior, quam E; igitur

tur D, ad F, minorem habet proportionem, quam D, ad E; & quia E, productus est ex B, in D, ut D, ad E, ita est vnitas ad B; ergo D, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad B; & propterea D, denominatus per F, est minor vnitate denominata per B: sunt autem C, æquales D, denominato per F; ergo C, sunt minores vnitate denominata per B. Quod, &c. Prop. 23.

Corollarium Primum.

Vnde constat primo loco vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis. Prop. 15.

Corollarium Secundum.

Patet etiam secundo loco, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum. Prop. 16.

Probl.

Probl. 2. Prop. 25.

Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem datus numerus metiatur ad numerum vnitate maiorem.

A. 39 C. 7. B. 43.
D. 10. E. 11. F. 14. G. 15.

DAta sit proportio minoris inæqualitatis A, ad B, & datus numerus C, opportet alteram proportionem inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem C, metiatur ad numerum unitate maiorem. Data propor- Prop. 14. tione minoris inæqualitatis A, ad B, maior inueniatur, quæ sit numeri D, ad numerum E, vnitate maiorem. Si contigerit C, metiri D, constat proportionem D, ad E, quæsitam esse. Quod si C, non metitur D, sumatur C, toties, donec fiat maior D, & sit factus F, cui unitate aggregata fiat G. Dico proportionem F, ad G, esse quæsitam; quoniam F, maior est D, habet F, ad vnitatem maiorem proportionem, quam D; & componendo F, ad G, maiorem, quam D, ad E; sed D, ad E, adhuc maiorem habet, quam A, ad B; ergo F, ad G, multò maiorem habet, quàm A, ad B: inuenta est ergo proportio F, numeri, quem C, metitur ad G, numerum vnitate maiorem, quæ est maior proportione A, ad B. Quod faciendum erat.

Theor.

Theor. 24. Prop. 26.

Vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum disposita, & aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ differentia consequentium dispositionis Arithmeticæ.

A ——————————— C. $\frac{1}{2}$
B. 2. D. 14. E. 15.
H ——————————— F. 7. G. $\frac{7}{15}$

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quorum differentia B; & sit C, vnitas denominata per B. Dico A, æqualem esse C: alias erit A, maior, vel minor C. Sit maior; igitur in aliqua multi- Coroll. 2-
tudine sumptæ à prima unitates dispositæ in A, implent Prop. 24.
C: sit huiusmodi multitudinis numerus D, qui adiecta Ax. 1.
unitate fiat E; ergo aliquot unitates ex dispositis in A, Def. 10.
sumptæ à prima in multitudine numeri E, sunt maiores C, quod est absurdum: igitur non est A, maior C. Sit Prop. 24.
minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad Prop. 25.
C, inueniatur altera maior, quæ sit numeri D, quem B, metiatur ad E, numerum unitate maiorem; metiatur autem B, ipsum D, per F; igitur F, ad D, est ut unitas ad B; unitas autem ad B, est ut C, ad vnitatem; ergo F, ad D, est ut C, ad unitatem; & D, ad E, maiorem habet proportionem A, ad C; ergo ex æquo in perturbata I, ad E, maiorem habet proportionem, quàm A, ad vnitatem. Denominetur I, per E, ut fiat fractio G; ergo vt

E est

eſt I, ad E, ita G, ad unitatem; igitur G, ad vnitatem habet maiorem proportionem quàm A, ad eamdem vnitatem; ergo G, maior eſt A. Sumantur ex vnitatibus diſpoſitis in A, à prima totidem ſecundum numerum F; Prop. 23. & ſit aſſumptarum extenſio H: conſtat quòd H, eſt æqualis F, denominato per E, nempe fractioni G; ergo etiam H, maior eſt A, pars toto, quod eſt abſurdum: igitur A, non eſt minor C; ſed neque maior. Ergo A, eſt æqualis C. Quod, &c.

Aliter.

A. 1.	3.	5.	K. 7.	9.	11.
E. $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$			
C ——	——	——		I. $\frac{1}{63}$	——
B. 2.	D. $\frac{1}{2}$	F. 3.		G. 6.	H. 7.

Sit A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum conſequentium differentia B; & in C, ſint diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis numerorum A; & unitas denominata per B, ſit D. Dico C, æqualem eſſe D. Sit E, aggregatum quotlibet ex diſpoſitis in C, à prima, quarum multitudo F; & ex F, in B, fiat G, qui auctus unitate fit H: Prop. 23. conſtat E, æqualem eſſe F, denominato per H: inter diſpoſitas in C, ſit I, proximè ſuccedens aggregatis in E; & K, numerus ordinis eiuſdem inter numeros A, cuius I, Prop. 21. inter vnitates C: conſtat etiam, quod unitatum C, quæ ſuccedunt ab I, ſumptæ ſemper totidem ſecundum numerum K, ad ſingulas eaſdem à prima ſunt ut unitas ad K; ergo colligendo, omnes C, ab I, ad omnes eaſdem C, à prima ſunt ut unitas ad K; ergo conuertendo, & per conuerſionem rationis, omnes C, ad aſſumptas in E,

ſunt

ſunt ut K, ad exceſſum K, ſuper vnitatem: & quoniam K, & I, in ſuis diſpoſitionibus ſunt ordinis eiuſdem; eſt exceſſus K, ſuper unitatem ad exceſſum conſequentium B, vt multitudo aggregatarum in E, videlicet numerus F, ad unitatem; ergo exceſſus K, ſuper unitatem eſt æqualis producto ex F, in B, videlicet numero G; & propterea, adiecta hinc inde unitate, numerus K, eſt ęqualis H; igitur C, ad E, eſt ut H, ad G; & E, ad unitatem eſt ut F, denominatus per H, ad unitatem, uidelicet ut F, ad H; ergo ex æquo in perturbata C, ad unitatem eſt ut F, ad G; ſed quia B, multiplicando F, facit G, eſt ut F, ad G, ita unitas ad B; uel unitas denominata per B, uidelicet D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem eſt ut D, ad eamdem uuitatem. Æquales ergo ſunt C, & D. Quod, &c.

Theor. 25. Prop. 27.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aßumpta ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ ad vnitatem.

SInt A, numeri Arithmeticè diſpoſiti ab unitate quorum conſequentium differentia B; & unitatum, quę denominantur planis A, ſint aſſumptæ à prima C, totidem, quot ſunt unitates in D; & ſuccedentes in infini-

A. 1. 3. 5. 7. 9. 11.
C. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ E. —— —— ——
B. 2. D. 3. F. 6. G. 7.

tum intelligantur diſpoſitæ, & aggregatæ in E; & ex B, in D, producatur F. Dico C, ad E, eſſe ut F, ad unitatem. Augeatur F, unitate ut fiat G: conſtat C, æqua-
Prop. 23. les eſſe D, denominato per G; & C, E, ſimul æquales
Prop. 27. eſſe unitati denominatę per B; & quia ex ductu B, in D, fit F, eſt unitas ad B, ut D, ad F; & unitas denominata per B, eſt æqualis D, denominato per F; propterea C, E, ſimul ſunt æquales D, denominato per F; ergo C, ad C, E, ſimul ſunt ut D, denominatus per G, ad D, denominatum per F; uel reciprocè, ut F, ad G; & diuidendo, C, ad E, ſunt ut F, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 26. Propoſ. 28.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ad vltimam aſſumptarum ſunt, vt productum ex numero eiuſdem ordinis cum aſſumpta inter Arithmeticè diſpoſitos, & numero multitudinis aſſumptarum ad vnitatem.

Sit in A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab unitate; & unitatum, quæ denominantur planis A, ſint quot-

A. 1.	3.	E. 5.	F. 7.
B. $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	D. $\frac{1}{35}$	
	C. 3.		

quotlibet aſſumptæ à prima B, quarum multitudo C, & ultima D, & eiuſdem ordinis inter Arithmeticè diſpoſitos numerus E. Dico B, ad D, eſſe ut planum C E, ad unitatem. Inter numeros A, ſit F, proximus maior E. Et quoniam E, D, ſunt eiuſdem ordinis in ſuis diſpoſitionibus; conſtat D, æqualem eſſe unitati denominatæ plano E F: quoniam etiam C, eſt multitudo B, ſunt in ordine A, numeri ab unitate ad E, totidem, & poſt unitatem ad F, pariter totidem Arithmeticè diſpoſiti; ergo exceſſus F, ſuper unitatem toties continet differentiam conſequentium, quot ſunt unitates in C; ergo C, multiplicando differentiam conſequentium producit exceſſum F, ſuper vnitatem cui quidem exceſſui adiecta vnitate fit numerus F; vnde conſtat B, eſſe æquales C, denominato per F; ergo B, ad D, ſunt vt C, denominatus per F, ad vnitatem denominatam per planum E F; & multiplicando terminos per planum E F, vt B, ad D, ita ſe habet planum C E, ad unitatem. Quod, &c. Prop. 23.

Theor. 27. Propoſ. 29.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt differentia conſequentium ad numerum

rum ordinis eiuſdem cum aſſumpta inter Arithmeticè diſpoſitos.

A. 1. 3. E. 5. 7. 9. 11

B. 2. C. $\frac{1}{35}$ D —— ——

F $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ G. 3.

SIt in A, diſpoſitio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, ſit aſſumpta C, quam ſuccedentes in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſint in D; & eiuſdem ordinis cum C, ſit E, inter numeros A. Dico C, ad D, eſſe ut B, ad E. Sint, quæ præcedunt D, aggregatæ in F, quarum multitudo G; conſtat C, ad F, eſſe ut unitas ad planum G E; & F, ad D, eſt ut planum B G, ad unitatem; ergo ex æquo in perturbata C, ad D, eſt ut planum B G, ad planum G E; vel ut B, ad E. Quod, &c.

Prop. 28.
Prop. 27.

Theor. 28. Prop. 30.

Duarum fractionum minimis numeris expreſſarum, cum denominatores numeratorum ſunt æquemultiplices ſuperparticulares, maior eſt, quæ maioribus numeris exponitur, & exceſſus eſt æqualis exceſſui numeratorum denominato per planũ denominatorum.

Sint

A. 3.	H. 4.	B. 7.		
——		——	C. 12.	D. 28.
F. 13.		G. 29.		
L. 91.		K. 87.	I. 84:	

SInt duæ fractiones, quarum numeratorum A, B, ſint æquemultiplices C, D; & adiecta ſingulis unitate fiant denominatores F, G, æquemultiplices ſuperparticulares numeratorum A, B, quibus propoſitæ fractiones in minimis numeris exprimuntur; & ſit B, maior A, per exceſſum H; vnde fit etiã D, maior C; & addita communi unitate, G, maior F. Dico fractionem B, per G, excedere fractionem A, per F, numero H, denominato per planum F G. Ex B, ducto in C, & F, producantur I, & K; & ex A, in G, fiat L: quia D, C, ſunt æquemultiplices B, A, ut B, ad A, ita D, ad C; & idem I, qui fit ex B, in C, fiet etiam ex A, in D; igitur A, multiplicando G, D, facit K, I; & multiplicando vnitatem exceſſum G, D, facit ſe ipſum A, exceſſum K, I: demonſtrabitur eodem modo B, fieri exceſſum L, I: ergo exceſſus B, A, videlicet H, eſt etiam exceſſus L, K; ſed exceſſus fractionum B, per G, & A, per F, eſt exceſſus L, K, denominatus plano G F; ergo exceſſus fractionum B, per G, & A, per F, eſt H, denominatus plano G F. Quod, &c.

Theor. 29. Prop. 31.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſum-

assumpta ad succedentes in infinitum sunt, vt multiplex differentia in dispositione secundum multitudinem aßumptarum ad multiplicem eiusdem differentia secundum multitudinem pracedentium à prima semper auctum vnitate.

B. 3.

A. 1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.
E.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$	C. $\frac{1}{70}$	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{208}$	G. —

F. 2. D. 3. L. 5.

I. 6. K. 7. H. 9. M. 16.

SIt A, dispositio Arithmetica numerorum ab vnitate, quorum differentia B; & vnitatum, quæ denominantur planis A, sint assumptæ C, quarum multitudo numerus D; & sint E, quæ præcedunt, quarum multitudo numerus F; & quæ sequuntur sint in infinitum dispositæ, & aggregatæ in G; & ex B, ducto in F, D, fiant I, H; & I, auctus unitate fiat K. Dico C, ad G, esse ut H, ad K. Fiat ex F, D, aggregatum L, & ex H, K, aggregatum M: constat L, esse multitudinem E, & C, simul. Et quoniam ex B, ducto in F, D, facti sunt I, H; etiam ex B, in L, fiet aggregatum ex I, H; quod auctum unitate est aggregatum ex H, K, videlicet M: ergo M, est productum ex L, in B, auctum unitate; & propterea
Prop. 23. C, E, simul sunt ęquales L, denominato per M; & E, ęqualis est F, denominato per K; ergo C, est æqualis excessui L, F, nempe D, numero denominato per planum M
Prop. 30. K; ergo C, ad E, C, simul est ut D, denominatus per planum M K, ad L, denominatum per M; vel (multiplicando

do terminos per planum M B,) ut planum D B, denominatum per K, ad planum B L: sunt autem E, C, simul ad G, vt planum B L, ad unitatem; ergo ex æquo C, ad G, est ut planum B D, vel H, denominatus per K, ad unitatem; sed est H, denominatus per K, ad unitatem ut H, ad K. Ergo C, ad G, est ut H, ad K. Quod, &c. Prop. 27.

Theor. 30. Prop. 32.

Vnitates, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitate binæ à prima sunt duplæ singularum vnitatum, quæ denominantur planis omnium imparium ab vnitate.

A.	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.
C.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$	
B.	1.				3.				5.				7.
D.			$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{15}$				$\frac{1}{35}$		

SInt dispositiones omnium numerorum A, & omnium imparium B, ab vnitate; & vnitatum denominatarum planis A, & B, sint C, & D. Dico binas C, duplas esse singularum D, à prima. Quoniam in A, sunt omnes impares interiectis inter binos consequentes singulis paribus, concipientur singulę dispositiones Arithmeticæ trium numerorum, quorum extremi impares, & medius par; igitur singula plana sub extremis imparibus, videlicet singula plana numerorum B, à primo sunt media harmonicè inter bina plana sub singulis impari- Prop. 1.

 bus

bus,& intermedio pari, videlicet inter bina plana numerorum A, à primo; ergo ſingulæ vnitates planis B, denominatæ, videlicet ſingulæ D, à prima ſunt mediæ Arithmeticè inter binas vnitates planis A, denominatas, videlicet binas C, à prima. Ergo binæ C, ſunt duplæ ſingularum D, à prima. Quod, &c.

Prop. 3.

Theor. 31. Prop. 33.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate ſumptæ ſemper totidem à prima ſecundum aliquem numerum ad vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè cum eodem numero exceſſu diſpoſitorum ab vnitate ſingulas à prima [illegible]*nt, vt idem numerus ad vnitatem.*

A	[illegible]	[illegible]	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{[illegible]}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{90}$	

C. 3.

D	1.	4.	7.	10.
E	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{70}$	

SInt diſpoſitiones A, omnium numerorum, & B, vnitatum denominatarum planis A, quæ ſemper totidem ſumantur à prima ſecundum numerũ C; ſint etiam diſpoſitiones, vna quidẽ D, Arithmetica numerorum ab vnitate cum exceſſu C, & altera E, vnitatum, quæ denominantur planis D. Dico quòd B, totidem ſemper à prià prima, quot ſunt vnitates in C, ad ſingulas E, ſunt vt C, ad vnitatem. Quoniam in D, ſunt numeri ab vnitate, quorum exceſſus C, & in A, ſunt oẽs numeri; igitur oẽs D, ſunt inter numeros A, ab vnitate ſemper totidem interiectis, quot ſunt vnitates C, vna dempta; & propterea in A, poſſunt concipi ab vnitate ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ totidem ſemper terminorum, quot ſunt vnitates C, vna adiecta, quorum in extremis locis ſunt numeri D; & B, ſumptæ ſemper totidem à prima, quot ſunt vnitates in C, ſunt vnitates denominatæ planis numerorum, qui in ſingulis huiuſmodi diſpoſitionibus comprehenduntur; & E, ſingulæ à prima ſunt vnitates denominatæ planis extremorum earundem diſpoſitionum. Ergo ſumptæ B, à prima ſemper totidem ſecundum numerum C, ſunt ad ſingulas E, à prima, vt C, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 8.

Theor. 32. Prop. 34.

Factis duabus Arithmeticis diſpoſitionibus à duobus numeris, quorum ſunt æquemultiplices differentiæ in diſpoſitionibus; vnitates denominatæ planis numerorum earumdem, cum eiuſdem ſunt ordinis, inter ſe reciprocè ſunt, vt quadrati primorum numerorum.

C. 2. D. 5. E. 6. F. 15. G. 3.

A.	2.		8.		14.		20.		26.
H.		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{112}$		$\frac{1}{280}$		$\frac{1}{520}$	
B.	5.		20.		35.		50.		65.
I.		$\frac{1}{100}$		$\frac{1}{700}$		$\frac{1}{1750}$		$\frac{1}{3250}$	
K.	1.		4.		7.		10.		13.
L.		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{28}$		$\frac{1}{70}$		$\frac{1}{130}$	

SInt A,& B, duæ Arithmeticæ diſpoſitiones à numeris C,D,quarum differentiæ ſint E,F,æquemultiplices C, D, per numerum G; & ſint H, I, vnitates denominatæ planis numerorum A, B. Dico H, ad I, eiuſdem ordinis eſſe, vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Fiat K, Arithmetica diſpoſitio ab vnitate, in qua differentia G, cuius numerorum planis denominatæ vnitates diſponantur, in L. Quoniam C, metitur ſe ipſum primo loco diſpoſitum in A, per vnitatem primo loco diſpoſitam in K; & metitur E, differentiam numerorum A, per G, differentiam numerorum K; ergo componendo, C, metitur omnes A, per omnes eiuſdem ordinis K; ergo L, ad H, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri C,ad vnitatem; & conuertendo, H, ad L, ita ſe habent vt vnitas ad quadratum C: eadem methodo demonſtrabimus, quod L, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad vnitatem; & ex æquo in perturbata H, ad I, eiuſdem ordinis ita ſe habent vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Quod,&c,

Prop. 19.

Theor.

Theor. 33. Prop. 35.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab aliquo numero, sumptæ ab assumpta semper totidem secundum numerum ordinis eiusdem inter Arithmeticè dispositos, ad sumptas à prima semper totidem secundum primum numerum eorumdem Arithmeticè dispositorum sunt, vt idem primus numerus ad numerum ordinis eiusdem cum assumpta.

B. 2. E. 5.
A. 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20.
C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ $\frac{1}{238}$ $\frac{1}{340}$
F. 3.
G. 2. 8. 14. 20.
I. $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{112}$ $\frac{1}{280}$
H. 5. 20.
K. $\frac{1}{100}$ &c.

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi à B, & sint C, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum assumpta D, & eiusdem ordinis inter Arithmeticè dispositos A, sit E. Dico C, sumptas à D, semper totidem secundum numerum E, ad easdem C, sumptas à prima totidem semper secundum numerum B, esse vt B,

ad

ad E: ſit F, differentia in diſpoſitione A, & à numeris B, E, fiant Arithmeticæ diſpoſitiones G, H, quarum differentiæ plana F B, F E: & vnitates denominatæ planis numerorum G, H, ſint I, K. Quia omnes numeri G, H, ſunt inter numeros A, à B, E, ſemper totidem interiectis, quot ſunt vnitates in B, E, vna dempta; poterunt concipi in A, ſingulæ diſpoſitiones Arithmeticæ à B, C, totidem ſemper numerorum, quot ſunt vnitates in B, E, vna amplius, in quarum extremis reperiuntur bini con-

Prop. 8. ſequentes numeri diſpoſitionum G, H: ergo vnitates denominatæ planis huiuſmodi ſingularum diſpoſitionum Arithmeticarũ ab E, cuiuſmodi ſunt C, ſumptę à D, ſemper totidem ſecundum E, ad vnitates denominatas plano extremorum earumdem, cuiuſmodi ſunt ſingulæ K, à prima ſunt vt E, ad vnitatem, vel vt quadratus numeri

Prop. 34. E, ad E; ſingulæ autem K, ad ſingulas I, à prima ſunt, vt quadratus numeri B, ad quadratum E: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ à D, ſemper totidem ſecundum E, ad ſingulas I, a prima ſunt, vt quadratus B, ad E;

Prop. 8. ſingulæ autem I, vtpote vnitates denominatæ planis extremorum diſpoſitionum Arithmeticarum, quæ ſingulæ concipiuntur inter numeros A, a B, ad vnitates denominatas planis conſequentium earumdem diſpoſitionum, cuiuſmodi ſunt vnitates C, ſumptæ a prima ſemper totidem ſecundum numerum B, ſunt vt vnitas ad B, vel vt B, ad ſui quadratum: ergo ex æquo in perturbata C, ſumptæ a D, ſemper totidem ſecundum E, ad eaſdem C, ſumptas a prima ſemper totidem ſecundum B, ſunt vt B, ad E. Quod, &c.

Theor.

Theor. 34. Propos. 36.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum sumptæ à duabus assumptis totidem semper secundum numeros ordinum earumdem sunt reciprocè, vt ijdem numeri.

A. 2.	E. 5.	8.	F. 11.	14.	
B.	$\frac{1}{10}$	C. $\frac{1}{40}$	$\frac{1}{88}$	D. $\frac{1}{154}$	

Sint numeri A, dispositi Arithmeticè, & B, vnitates denominatæ planis eorumdem, quarum sint assumptæ C, D, & eorumdem ordinum inter numeros A, sint E, F. Dico B, sumptas a C, semper totidem secundum numerum E, ad easdem B, sumptas à D, semper totidem secundum numerum F, esse vt F, ad E. Quoniam B, sumptæ à C, semper totidem secundum numerum E, ad easdem B, sumptas à prima semper totidem secundum primum numerorum A, sunt vt idem primus ad E; item ipsæ B, sumptæ à prima semper totidem secundum eumdem numerum primum ad easdem B, sumptas à D, semper totidem secundũ numerum F, sunt vt F, ad eumdem primum numerorum A; ergo ex æquo in perturbata B, sumptæ à C, semper totidem secundum numerum E, ad easdem B, sumptas à D, semper totidem secundum numerum F, reciprocè sunt vt F, ad E. Quod, &c.

Prop. 35.

Prop. 35.

Theor.

Theor. 35. Propos. 37.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum, sumptæ quotlibet à prima sunt æquales numero multitudinis earumdem denominato per productum sub eodem numero multitudinis, & primo numero; & differentia in dispositione semper auctum quadrato eiusdem primi numeri.

B. 2.	C. 3.	E. 4	G. 24.	H. 28.	F. $\frac{1}{7}$
A. 2.	5.	8.	K. 11.	L. 14.	17.
D.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{88}$	I. $\frac{1}{154}$	$\frac{1}{238}$

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi à B, cum differentia C; & sint D, unitates denominatæ planis numerorum A, quarum sumptę quotlibet à prima secundum multitudinem E, sint aggregatæ in F; & ex E, in planũ B C, ducto fit productus G, qui auctus quadrato B, fit H. Dico quod F, est æqualis E, denominato per H. Sit I, vltima sumptarum in F; & K, inter numeros
Prop. 8. A, eiusdem ordinis, cui proximus maior L: constat F, ad vnitatem denominatam plano B L, se habere vt E, ad vnitatem; ergo F, est æqualis E, denominato per planum B L: quoniam, quot sunt vnitates in E, tot sunt aggregatæ in F; totidemque sunt plana numerorum A, vsque ad L; necnon totidem sunt excessus æquales ipsi C, inter extremos L, B: ergo excessus L, B, ad C, est vt E,

ad

ad vnitatem; & propterea excessus L,B, est ęqualis plano C E; & L, est compositus ex plano C E, & numero B; & (multiplicando per B,) planus B L, est compositus ex producto B, in planum C E, & ex quadrato B; huiusmodi autem est etiam numerus H; ergo planus B L, est æqualis H: ergo F, est æqualis E, denominato per H. Quod, &c.

Theor. 36. Propos. 38.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum, quotlibet aggregatæ à prima sunt minores vnitate denominata plano primi numeri, & differentiæ dispositionis Arithmeticæ.

A. 5. C. 2. D. 3. E. 6. F. 30. G. 34.
B, $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ $\frac{1}{238}$

SInt in B, sumptæ à prima secundum numerum A, quotlibet vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum à C, cum differentia D; & fiat E, planum C D. Dico B, minorem esse vnitate denominata per E. Ex A, in E, ducto fiat F, qui auctus quadrato C, sit G: quia G, maior est F, habet A, ad G, proportionem minorem, quam ad F; sed, cum F, sit productus ex A, in E, vt A, ad F, ita est vnitas ad E; ergo A, ad G, minorem habet proportionem, quam vnitas ad E; & A, denominatus per G; minor est vnitate denominata per E; est autem B, æqualis A, denominato per G; Prop. 37.
ergo B, minor est vnitate denominata per E. Quod &c.

G Corol-

Corollarium Primum.

Prop. 15. *Vnde constat vnitates denominatas planis numerorum Arithmeticè dispositorum in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.*

Corollarium Secundum.

Prop. 16. *Constat etiam, quod vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.*

Probl. 3. Prop. 39.

Data proportione minoris inæqualitatis alteram inuenire maiorem data, quæ sit inter numeros, quorum minor sit multiplex dati, & maior minorem excedat altero dato.

Sit

A. 23.	C. 3.	E. 6.	G. 42.
B. 29.	D. 7.	F. 7.	H. 49.

SIt data proportio minoris inæqualitatis A, ad B; datiq; numeri C, & D; opportet inuenire alteram proportionem minoris inæqualitatis maiorem data A, ad B, quæ sit inter numeros, quorum minor sit multiplex C, & maior minorem excedat per D. Inueniatur proportio maior data A, ad B, quæ sit numeri E; quem datus C, metiatur ad numerum F, vnitate maiorem; & D, multiplicando E, F, faciat G, H. Dico proportionem G, ad H, esse quæsitam. Est enim vt E, ad F, ita G, ad H, proportio minoris inæqualitatis maior datâ A, ad B; & quia C, metitur E; & E, metitur G; ergo C, metitur G; & conuertendo, G, est multiplex C: quia E, ad F, est vt G, ad H; diuidendo, E, ad vnitatem est vt G, ad excessum H, G; & permutando, E, ad G, est, vt vnitas ad excessum H, G; sed (cum D, multiplicando E, fecerit G,) vt E, ad G, ita est vnitas ad D; ergo vnitas ad excessum H, G, est vt vnitas ad D; igitur D, est excessus H, G: inuenta est ergo proportio minoris inæqualitatis G, ad H, maior data A, ad B, in qua minor numerus G, est multiplex dati C, & maior H, excedit G, per alterum datum D. Quod facere, &c. Prop. 1.

Theor. 37. Prop. 40.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum dispositæ in infinitũ, et aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ ꝑ produ-

ctum numeri primi in Arithmetica diſpoſitione, & differentia conſequentium.

A ——— ——— ——— ——— ——— ——— ——— ——— ——— ———

B. 2. C. 3. D. $\frac{1}{6}$ E —— F ——

I —— G —— H ——— K ———

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorũ à B, cum differentia C; & ſit D, vnitas denominata plano B C. Dico A, eſſe æqualem D. Alias erit A, maior, vel minor D: ſit maior; igitur in aliqua multitudine ſumptę à prima vnitates diſpoſitæ in A, implent D: ſit huiuſmodi multitudinis numerus E, qui adiecta vnitate fiat F; ergò aliquot vnitates A, ſumptæ in multitudine F, ſunt minores D, quod eſt abſurdum; igitur non eſt A, maior D. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad D, inueniatur altera minoris inæqualitatis maior data, quæ ſit numeri G, multiplicis plani B C, ad numerum H, excedentem ipſum G, quadrato numeri B; ſit autem G, multiplex plani B C, ſecundum I; & vnitatum denominatarum in A, ſumantur a prima totidem ſecundum numerum I; & ſumptarum ſit aggregatum K; conſtat K, æqualem eſſe I, denominato per H; & quoniam I, multiplicando planum B C, facit G; ergo vt vnitas ad planum B C, ita ſe habet I, ad G; ſed vnitas ad planum B C, eſt vt D, ad vnitatẽ; ergo vt I, ad G, ita eſt D, ad vnitatem; & G, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad D; ergo ex æquo in perturbata I, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad vnitatem; ſed vt I, ad H, ita eſt K, ad vnitatem; ergo K, ad vnitatem habet maiorem pro-

Coroll. 2. prop. 38.
Def. 10.
Prop. 38.
Prop. 39.
Prop. 37.

por-

portionem quam A, ad eamdem vnitatem, maior ergo est K, quàm A, pars, quàm totum, quod est absurdum: non est ergo A, maior D, neque minor. Ergo A, æqualis est ipsi D. Quod, &c.

Idem Aliter.

	B. 2.		C. 3.			
A.	2.	5.	F. 8.	11.	14.	17.
D.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	E $\frac{1}{88}$	$\frac{1}{154}$	$\frac{1}{238}$	

SInt A, numeri Arithmeticè dispositi à B, cum differentia C; & D, vnitates denominatæ planis A, in infinitum dispositæ, & aggregatæ. Dico D, æquales esse vnitati denominatæ plano B C. Sumantur D, à prima tot, quot sunt vnitates in B, & assumptas proximè sequatur E, cuius ordinis inter numeros A, sit F; & ab E, sumantur D, totidem semper secundum numerum B, sicut à prima; & iterum ab eadem E, sumantur totidem semper secundum numerum F: quia D, sumptę ab E, secundum F, semper totidem ad easdem D, sumptas à prima secundum B, semper totidem sunt vt B, ad F; ergo colligendo, omnes D, ab E, ad omnes D, sunt vt B, ad F; & per conuersionem rationis primæ sumptæ D, à prima secundum numerum B, ad omnes D, à prima sunt vt excessus F, B, ad F; est autem excessus F, B, toties multiplex excessus C, quot sunt primæ sumptæ D, videlicet secūdū numerum B; quare excessus F, B, est æqualis plano B C; & F, est compositus ex plano B C, & B; sumptæ vero primæ D, secundum numerum B, sunt æquales B, denominato per productum ex B, & plano B C, auctum quadrato B; videlicet diuidendo per B, vnitati denominatæ per planum B C, auctum B, Prop.35. Prop.37.

vel

uel unitati denominatæ per F; ergo unitas denominata per F, ad D, eſt ut planum B C, ad F; uel ut unitas denominata per F, ad unitatem denominatam plano B C: ergo ſunt æquales D, & unitas denominata plano B C. Quod, &c.

Theor. 38. Prop. 41.

Vnitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum quotlibet aſſumptæ a prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt planum ſub numero aſſumptarum, & differentia diſpoſitionis Arithmeticæ ad primum eiuſdem diſpoſitionis numerum.

B. 2. C. 3. D. 4.

A. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ ————————

E. $\frac{1}{7}$ F ————————

SInt A, unitates denominatæ planis Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia C; quarum aſſumptæ à prima quotlibet ſecundum numerum D, ſint compoſitæ in E; & reliquæ in infinitum diſpoſitæ ſint in F. Dico E, ad F, eſſe ut planum C D, ad B. Sunt enim E, æquales D, denominato per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B; & A, æquales unitati denominatæ plano B C; ergo E, ad A, ſunt ut D, denominatus per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam plano B C; & diuiden-

Prop. 8.

Prop. 39.

uidendo per D, ut unitas denominata per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam per productum ex D, & plano B C; uidelicet ut productum ex D, & plano B C, ad seipsum auctum quadrato B; & diuidendo per B, ut productum ex D, in C, ad se ipsum auctum numero B; & diuidendo, E, ad F; sunt ut planum D C, ad B. Quod, &c.

Theor. 39. Prop. 42.

Vnitatum denominatarum planis Arithmeticè dispositorum quotlibet assumptæ à prima ad vltimam assumptarum sunt, vt planum numeri multitudinis aßumptarum, & numeri ordinis eiusdem cum aspta inter Arithmeticè dispositos ad eorumdem primum.

C. 2.	5.	8.	11.	F. 14.	G. 17.		D. 3.
B	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{88}$	$\frac{1}{154}$	E. $\frac{1}{238}$		A. 5.

SInt secundum numerum A, totidem in B, dispositæ unitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè dispositorum a C, cum differentia D, quarum assumptarum ultima E; & eiusdem ordinis inter Arithmeticè dispositos sit F, quem sequatur G. Dico B, ad E, se habere ut planum A F, ad C. Quoniam B, sunt æquales A, denominato per productum ex A, & plano C D, auctum quadrato C; & E, est unitas denominata pla- Prop. 37. Prop. 37.

no

no F G; productum autem ex A, & plano C D, auctum quadrato C, est planum C G; ergo B, ad E, sunt ut A, denominatus plano C G, ad unitatem denominatam plano F G; & multiplicando per G, ut, A denominatus per C, ad uninatem denominatam per F; & diuidendo per A, ut unitas denominata per C, ad unitatem denominatam per planum A F; uidelicet ut planum A F, ad C. Quod, &c.

Theor. 40. Propos. 43.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum, qualibet assumpta ad succedentes in infinitum est, vt differentia ad numerum ordinis assumptæ inter Arithmeticè dispositos.

A. 2. 5. 8. 11. D. 14. B. 3.

F. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{88}$ $\frac{1}{154}$ C. $\frac{1}{238}$ E ——— G. 5.

VNitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum ab A, cum differentia B, sit assumpta C, cuius ordinis inter Arithmeticè dispositos numerus D; & succedentes ipsi C, sint dispositæ in infinitum, & aggregatæ in E; quæ uerò præcedunt unà cum eadem assumpta sint compositæ in F, quarum multitudo G. Di-
Prop. 42. co C, ad E, se habere uti B, ad D. Quoniam C, ad F,
Prop. 41. est ut A, ad planum G D; & F, ad E, sunt ut planum G B, ad A; ergo ex æquo in perturbata C, ad E, est ut planū G B, ad planū G D; & diuidēdo per G, ut B, ad D. Quod, &c.

Theor. 41. Prop. 44.

Duarum fractionum, cum denominatores eodem numero excedunt æquemultiplices numeratorum, maior est, quæ maioribus numeris exprimitur, & excessus est fractio, in qua productum eiusdem numeri & differentiæ numeratorum denominatur plano denominatorum.

I. 5.	L. 3.	K. 2.
A ——		B ——
C. 34.	E. 4.	D. 16.
G. 30.		H. 12.

Sint duæ fractiones A, B, quarum denominatores C, D, superant eodem numero E, numeros G, H, æquemultiplices numeratorum I, K; & I, excedat K, per L; ergo G, excedit H; & adiecto E, communi, etiam C, excedit D. Dico A, maiorem esse B. Quia G, H, sunt æquemultiplices I, K; ergo I, ad G, est vt K, ad H; & quia G, maior est H, maiorem habet proportionem G, ad E, quàm H, ad E; & componendo, G, ad C, quàm H, ad D; & ex æquo I, ad C, quam K, ad D; ergo fractio A, maior est B. Dico præterea excessum esse planum L E, denominatum plano C D. Quoniam I, ad K, est vt G, ad H; planum I H, plano K G, est æquale: & quoniam E, est excessus D H; planum I E, est excefſus planorum I D, I H, vel I D, K G: & eadem ratione planum K E, eſt exceſſus planorum K C, H G; ergo idem eſt exceſſus tum planorum I D, K C, tum etiam planorum I E, K E; cum autem L, ſit exceſſus I, K; ergo L E, eſt exceſſus planorum I E, KE; videlicet exceſſus planorum I D, K C; ſed exceſſus A, B, eſt æqualis exceſſui planorum I D, K C, denominato per planum D C; ergo exceſſus A, B, eſt planum L E, denominatum plano D C, Quod, &c.

Theor. 42. Prop. 45.

Vnitatum, quæ denominantur planis diſpoſitorum Arithmeticè, quælibet aſſumptæ ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt multiplex differentiæ in Arithmetica diſpoſitione ſecundum multitudinem aſſumptarum ad multiplicem eiuſdem differentiæ ſecundum multitudinem præcedentium auctum primo eiuſdem diſpoſitionis numero.

B. 4. C. 5. Q. 70.
G. 2. D. 3. M. 5. N. 116.
F $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{126}$ A $\frac{1}{266}$ $\frac{1}{456}$ $\frac{1}{696}$ E —— ——
I. 10. K. 15. L. 14.

SInt A, aſſumptæ vnitates denominatæ planis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum à B, cum differentia

tia C; & multitudo A, sit D; & sint E, infinitæ succedentes ipsis A; & F, præcedentes, quarum multitudo G; & ex ductu C, in G, D, fiant I, K; & I, auctus B, sit L. Dico A, ad E, se habere vt K, ad L. Fiat M, aggregatum numerorum G, D; & N, productum B C M, auctum quadrato B. Constat F, A, simul æquales esse Prop. 37. M, denominato per N: ducatur etiam B, in L, & fiat Q: quia L, est compositus ex B, I; videlicet ex B, & plano G C; etiam Q, compositus est ex producto BCG, & ex quadrato B: constat pariter F, æquales esse G, deno- Prop. 37. minato per Q; & A, excessui dictarum fractionum, vide- Prop. 44. licet producto sub D, & quadrato B, denominato per planum QN; ergo A, ad F, A, simul sunt vt productum ex D, & quadrato B, denominatum per QN, ad M, denominatum per N; & multiplicando per N C, vt productũ ex plano D C, & quadrato B, denominatum per Q, ad planum M C; sunt autem F, A, simul ad E, vt M Prop. 41. C, ad B; ergo ex æquo A, ad E, sunt vt productum ex plano DC, & quadrato B, denominatum per Q, ad B; & diuidendo per B, vt productum DCB, denominatũ per Q, ad vnitatem; videlicet vt productũ DCB, ad Q; est autem K, æqualis plano DC; & Q, æqualis plano BL; ergo A, ad E, sunt vt productum K B, ad productum B L; & diuidendo per B, vt K, ad L. Quod, &c.

✣

Finis Libri Primi.

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ, SEV De Additione Fractionum

LIBER SECVNDVS,

In quo de Fractionibus agitur, quas denominant numeri solidi. Demonstrantur Additiones in propositionibus 4. 5. 13. 20. Quadraturæ verò in 8. 15. 23. 27.

Theorema 1. Propositio 1.

Si quatuor magnitudines binæ se æqualiter excesserint, planum sub maioribus excedit planum sub minoribus plano sub eodem excessu, & aggregato maximæ, & minimæ.

SIt E, excessus A, B, æqualis excessui C, D. Dico excessum planorum A C, B D, æqualem esse plano sub E, & aggregato A, D. Quoniam E, est excessus C, D;

E. 3. A. 5. B. 2. C. 7. D. 4.

C, D; planum E A, eſt exceſſus planorum C A, D A: & quoniam E, eſt exceſſus A, B; planum E D, eſt exceſſus planorum DA, DB; ergo colligendo plana EA, ED, ſimul ſunt ęqualia exceſſibus planorum CA, DA, DA, DB; videlicet vni exceſſui planorum C A, B D; plana verò E A, E D, ſunt æqualia plano ſub E, & aggregato A, D; ergo exceſſus planorum C A, B D, eſt æqualis plano ſub E, & aggregato A, D. Quod, &c.

Theor. 2. Prop. 2.

Numerorum Arithmeticè diſpoſitorum aggregatum eſt æquale dimidio plani ſub multitudine, & aggregato extremorum.

A. 2. 5. 8. 11. 14. B. 17. C. 4. D. 2.

SInt numeri Arithmeticè diſpoſiti, quorum primus A, vltimus B, & multitudo C. Dico aggregatos æquales eſſe dimidio plani ſub C, & aggregato A, B. Sit primo C, par cuius dimidium D; quoniam numeri A, B, & intermedij totidem ſunt, quot vnitates in C; ergo bini totidem ſunt, quot vnitates in D; bini autem tùm extremi A, B, tùm ab extremis æqualiter diſtantes inter ſe ſunt æquales; ergo omnes aggregati ſunt ad aggregatum extremorum A B, vt D, ad vnitatem; & omnes aggregati ſunt æquales plano ſub D, & aggregato extremorum; videlicet dimidio plani ſub C, & aggregato A, B.

Sed

A. 2. 5. 8. 11. B. 14. C. 5. D. 4. E. 8.

Sed esto C, impar, & vnitate dempta fiat D, par: quia excessus extremorum est multiplex excessus consequentium per D; ergo excessus extremorum A, B, est par; & duplum A, est par; ergo aggregatum extremorum A, B, est par; cuius dimidium sit E: igitur E, medius est inter Arithmeticè dispositos ab A, ad B; & ad E, bini tùm extremi A, B, aggregati, tùm æqualiter distantes ab extremis dupli sunt; ergo omnes aggregati præter E, ad E, sunt vt D, ad vnitatem; & componendo omnes ad E, sunt vt C, ad vnitatem; ergo omnes aggregati sunt æquales plano sub E, & C; dimidio videlicet plani sub aggregato A, B, & C. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Dispositis Arithmeticè quotcunque numeris, differentia planorum sub primis, & vltimis ad aggregatum omnium præter primum, & vltimum sunt, vt duplum excessus ad vnitatem.

A. 2. B. 5. 8. 11. 14. 17. C. 20. D. 23.
E. 3. F. 18. G. 6. H. 3.

NVmerorum Arithmeticè dispositorum duo primi sint A, B, duo vltimi C, D, & consequentium excessus E. Dico differentiam planorum DC, AB, esse

ad

ad omnium aggregatum præter A, D, vt duplus E, ad vnitatem. Quoniã sunt æquales excessus D, C, B, A, vicissim etiã sunt æquales excessus D, B, C, A; sit F, excessus D, B, vel C, A; ergo excessus planorum D C, AB, est planum sub I, & aggregato A, D, vel B, C: sit G, multitudo omnium præter A, D, cuius dimidium H; ergo aggregatum omnium præter A, D, est planum sub H, & aggregato B, C; & est planum sub F, & aggregato B, C, ad planum sub H, & aggregato B, C, vt F, ad H: & quoniam F, toties continet E, quot G, vnitates; ergo F, ad G, est vt E, ad vnitatem; est autem G, ad H, duplus; videlicet vt duplus E, ad E; ergo ex æquo in perturbata F, ad H, est vt duplus E, ad vnitatem; ergo excessus planorum D C, A B, ad aggregatum omnium præter A, D, est vt duplus E, ad vnitatem. Quod, &c.

Prop. 1. 2.

Prop. 2. 2.

Theor. 4. Propos. 4.

Dispositis Arithmeticè quotcunque numeris, vnitates denominatæ solidis eorumdẽ consequentium sunt æquales aggregato ex intermedijs dispositis denominato per planoplanum ex binis extremis.

Sint vnitates quotcunque A, denominatæ solidis consequentium Arithmeticè quomodolibet dispositorũ. Dico A, æquales esse aggregato eorumdem dispositorum præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Sint B, totidem excessus alternorum in eadem dispositione ijsdem solidis denominati: & quia con-

	3.	5.	7.	9.	11.	13.
A.		$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{693}$	$\frac{1}{1287}$	
B.		$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{315}$	$\frac{4}{693}$	$\frac{4}{1287}$	

conſequentium Arithmeticè diſpoſitorum exceſſus ſunt æquales ; etiàm alternorum exceſſus æquales inter ſe ſunt ; & ſinguli dupli ſunt ad exceſſum conſequentium ; ergo ſingulæ B, ad ſingulas A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad vnitatem; & colligendo omnes B, ad omnes A, ſunt vt duplum exceſſus conſequentium ad
Prop.3.2. vnitatem ; videlicet, vt exceſſus planorum ſub binis extremis ad aggregatum omnium diſpoſitorum præter extremos ; & diuidendo per planoplanum ex binis extremis, vt exceſſus planorum ſub binis extremis eorumdẽ planoplano denominatus ad aggregatum omnium præter extremos pariter denominatum : ſunt autèm omnes B, æquales exceſſui planorum ſub binis extremis eorumdem planoplano denominato; ergo omnes A, ſunt æquales aggregato omnium præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Quod, &c.

Theor. 5. Propoſ. 5.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ conſequentium ab vnitate, quotlibet à prima ſunt æquales producto numeri multitudinis ipſarum in numerum ternario maiorem, denominato per quadruplum eiuſdem producti, addito ſemper 8.

Sint

A. 1.	2.	E. 3.	D. 4.	C. 5.	F. 6.
B.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$		
	G. 18.	I. 80.	K. $\frac{18}{80}$	L. 9.	M. 40.

SInt A, numeri conſequentes ab vnitate; & B, vnitates denominatæ ſolidis conſequentium A; & numerus multitudinis B, ſit E; qui ternario auctus fiat F; & productum ex E, in F, ſit G; cuius quadruplum auctum numero 8. ſit I; & ex denominatione G, per I, fiat fractio K. Dico, quòd aggregatum omnium B, eſt æquale K. Numerorum A, ſint D, C, duo, qui ſequuntur E: quoniam numeri A, terni denominant ſingulas B; ergo multitudo numerorum A, qui denominant B, binario ſuperat multitudinem B; videlicet numerum E; eſt autem C, qui binario excedit E; ergo C, eſt multitudo numerorum A, qui denominant B; & ſunt in A, omnes numeri ab vnitate; ergo diſpoſitorum in A, vſque ad C, ſunt vltimi C, D; primi vnitas, & 2; & extremi vnitas, & C: ſit M, planoplanum ſub D, C, 2. & vnitate; & L, ſit aggregatum reliquorum, præter vnitatem, & C; ergo B, ſunt æquales L, denominato per M: & quia C, binario, & F, ternario excedunt E; ergo F, excedit C, vnitate; & F, æqualis eſt C, & vnitati; vel D, & binario; ergo planũ E F, videlicet numerus G, duplus eſt L: item exceſſus plani D C, ſuper binarium (planum videlicet vnitatis, & binarij) duplus eſt eiuſdem L; ergo G, eſt exceſſus plani DC, ſuper binariũ; & planũ DC, excedit G, per binariũ; & quadruplũ DC, excedit quadruplũ G, per 8: eſt autẽ I, qui excedit quadruplum G; per 8: ergo I, eſt quadruplum plani D C, vel duplum planoplani ſub D, C, 2. & vnitate: ergo I, eſt duplum M; & G, ad L, eſt vt I, ad M. & permutando, G, ad I, eſt vt L, ad M; ergo L, denominatus per M, videlicet aggregatum omnium B, eſt æquale G, denominato per I, videlicet fractioni K. Quod, &c.

Prop. 4. 2.

Prop. 2. 2.

Prop. 3. 2.

Theor. 6. Propos. 6.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium consequentium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt minores quarta parte vnitatis.

1.	2.	3.	D. 4.	5.	6. B. 7.	A. 28.
C.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{120}$		E. 112. F. 120.

SInt C, quotlibet vnitates denominatę solidis omnium cōsequentium ab vnitate sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse quarta parte vnitatis. Fiat B, ternario maior D; & planum B D, sit A; cuius quadruplus E; qui auctus numero 8. sit F: ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & est A, ad E, vt vnitas ad 4. ergo A, ad F, minorem habet, quàm vnitas ad 4. & A, denominatus per F, est mi-
Prop. 5. 2. nor quarta parte vnitatis; sunt autē C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ sunt minores quarta parte vnitatis. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. *Vnde constat vnitates, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitate dispo-*

sposi-

ſpoſitas in infinitum, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.

Corollarium Secundum.

Patet etiam, quod vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propoſitam extenſionem minorem extenſione diſpoſitarum earumdem in infinitum. Pr. 16. 1.

Probl. 1. Prop. 7.

Datis duobus numeris alium inuenire, qui non minorem vno dato metiatur per ſe ipſum auctum altero dato.

A. 53.	M. 3.	E. 15.	F. 12.	G. 6.	
B. 212.	C. 221.	D.℞. 221.	H. 6.	K. 9.	L. 54.

Sint dati A, M: opportet numerum inuenire, qui non minorem dato A, metiatur per ſeipſum auctum dato M. Fiat B, dati A, quadruplus; & C, ſumma ex quadrato M, & B; & numeri C, ſumatur latus, vel radix

 qua-

A.53. M.3. E.15. F.12. G.6.
B.212. C.221. D.℞.221. H.6. K.9. L.54.

quadrata D; & ſit numerus E, non minor D; à quo ſubtrahatur M; & reſidui F, dimidium ſit G; & H, ſit numerus non minor G: Dico H, eſſe numerum non minorem A, per ſeipſum auctum numero M; fiat K, aggregatum ex H, & M; & ex ductu H, in K, fiat L; ergo L, eſt compoſitus ex quadrato H, & plano M H: & quoniam H, non eſt minor G; & eſt duplus G, æqualis F; & F, auctus M, eſt E; & E, non eſt minor D; ergo duplus H, auctus M, non eſt minor D; & quadratum dupli H, aucti M, non eſt minus C; eſt autem quadratum dupli H, aucti M, equale quadrato M, quadruplo quadrato H, & quadruplo plano MH; & ſunt quadruplum quadratum H, & quadruplus planus M H, æquales quadruplo L; ergo quadratum dupli H, aucti M, eſt æquale quadrato M, & quadruplo L; ergo quadratum M, & quadruplus L, non ſunt minores C; & ablato communi quadrato M, quadruplus L, non eſt minor B; & diuidendo per 4. numerus L, non eſt minor A. Inuenimus ergo numerum H, qui metitur L, numerum non minorẽ A, per ſe ipſum auctum numero M. Quod, &c.

Theor. 7. Prop. 8.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales quartæ parti vnitatis.

Sint

A ——————————— B ——— C ———

I ——— D — E ——— F ——— G — H —

SInt in A, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ ſolidis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem eſſe $\frac{1}{4}$. Alias erit A, maior, vel minor $\frac{1}{4}$. ſit maior; igitur in aliqua multitudine ſumptæ à Cor. 2.
prima vnitates in A, diſpoſitæ implent $\frac{1}{4}$. ſit huiuſmodi Prop. 9. 2.
multitudinis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C; ergo aliquot vnitates in A, diſpoſitæ ſumptæ à prima in multitudine numeri C, ſunt maiores $\frac{1}{4}$. quod eſt abſurdũ: Non Prop. 9. 2.
eſt igitur A, maior $\frac{1}{4}$. Sit minor, & data proportione mi- Pr. 25. 1.
noris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{4}$, inueniatur altera maior, quę ſit numeri I, quem numerus 4. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipſius D, ſit octuplus F; & inueniatur Prop. 7. 2.
numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per ſe ipſum auctum ternario; & ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudine numeri G; & aſſumptarũ ſumma ſit H: conſtat H, eſſe portionem ipſius A; & æqua- Prop. 5. 2.
lem producto ex numero G, in ſe ipſum ternario auctum denominato per quadruplum eiuſdem producti addito 8. quia autem productum ex G, in ſe ipſum ternario auctũ non eſt minus F; etiam denominatum per quadruplum Pr. 44. 1.
eiuſdem producti addito 8. non eſt minus F, denominato per quadruplum F, addito 8; & (diuidendo vtrumque numerum fractionis per 8.) non eſt minus D, denominato per quadruplũ D, auctũ vnitate; ergo H, non eſt minor, D, denominato per quadruplum D, auctum vnitate; eſt autem I, quadruplus D; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed quia D, ad I, eſt vt vnitas ad 4; vel $\frac{1}{4}$ ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{4}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quam A; maior

igitur est D, denominatus per E, quam A; & non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est maior A, pars, toto; quod est absurdum: non igitur A, minor est $\frac{1}{4}$; neque maior; ergo A, est æqualis $\frac{1}{4}$. Quod, &c.

Theor. 8. Propos. 9.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum consequentium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima ad succedentes in infinitum sunt, vt productum ex numero multitudinis ipsarum in se ipsum ternario auctum ad binarium.

A $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ E ——————

B. 2. C. 5. D. 10. F. 48.

VNitatum denominatarum solidis omnium numerorum consequentium ab vnitate sint A, assumptæ à prima in multitudine B; & residuæ in infinitum sint dispositæ, & aggregatæ in E; & B, ternario auctus sit C; & ex B, in C, fiat D. Dico A, ad E, esse vt D, ad binarium.

Prop.5.2. Fiat F, quadruplum D, auctum 8: constat A,
Prop.8.2. æqualem esse D, denominato per F; & aggregatas A, E, æquales esse vnitati denominatæ per 4. sed quia, vt vnitas ad 4. ita se habet D, binario auctus ad F; vnitas denominata per 4; videlicet aggregatæ A, E, sunt æquales D, binario aucto denominato per F; ergo A, ad aggregatas A, E, est vt D, denominatus per F, ad D, binario

rio

rio auctum denominatum per F; & (multiplicando per F,) vt D, ad D, binario auctum; ergo diuidendo, A, ad E, est vt D, ad binarium. Quod, &c.

Theor. 9. Prop. 10.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumpta à prima ad vltimã assumptarum sunt, vt aggregatum ex cubo numeri multitudinis ipsarum, & triplo quadrati eiusdem ad quaternarium.

		B. 4.	E. 5.	F. 6.	D. 7.	
A	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$	C	$\frac{1}{120}$	

SInt vnitatum, quæ denominantur solidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet assumptæ A, secundum numerum B; & vltima assumptarum sit C. Dico A, ad C, esse vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Sit D, numerus ternario maior B; & sint E, F, qui proximè succedunt ipsi B, in ordine omnium numerorum ab vnitate: constat F, E, dispositos esse Arithmeticè, vt binarius, & vnitas; & permutando, F, & binarium esse Arithmeticè, vt E, & vnitas; & communem excessum esse B; ergo planum F E, excedit planum sub binario, & vnitate, plano sub B, & aggregato ex F, & vnitate; videlicet plano B D; ergo planum B D, auctum binario est æquale plano F E: & quia B, est multitudo Prop.1.2.

ipsa-

B.4. E.5. F.6. D.7.

A. $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{60}$ C. $\frac{1}{120}$

Prop.5.2. ipſarum, A; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum B D, auctum 8; ſed quadruplum BD, auctum 8 eſt quadruplum plani B D, aucti 2; videlicet plani E F; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum E F: quia etiam B, eſt numerus multitudinis A, quarum vltima C; conſtat B, eſſe numerum ordinis C; & binario, ac vnitate minorem eſſe numeris, qui ſolidum producunt denominatorem C; ergo C, eſt vnitas denominata ſolido ſub B, & plano E F; ergo A, ad C, eſt vt planum B D, denominatum quadruplo plani E F, ad vnitatem denominatam ſolido ſub B, & plano E F; & multiplicando per planum E F, vt planum B D, denominatum per 4. ad vnitatem denominatam per B; & iterum multiplicando per B, vt ſolidum ſub quadrato B, & D; videlicet aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, denominatum per 4. ad vnitatem; & multiplicando per 4, vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum conſequentium ab vnitate; qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt binarius ad numerum ordinis aſſumptæ.

Sint

B. 3 D $\frac{1}{16}$ A $\frac{1}{8}$ C———

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate ſit aſſumpta A; cuius ordinis numerus B; & ſuccedentes in infinitum C. Dico A, ad C, eſſe vt binarius ad B. Sit D, aggregatum earum, quæ præcedunt C, à prima; quarum erit A, vltima; & numerus multitudinis ipſarum D, idem, qui ordinis aſſumptæ, videlicet B: ergo A, ad D, eſt vt 4. ad compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B; ſunt autem D, ad C, vt planum ſub B, & ipſo B, ternario aucto; videlicet vt compoſitum ex quadrato B, & triplo B, ad binarium; & multiplicando per B, vt compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad duplum B; ergo ex æquo A, ad C, eſt vt 4. ad duplum B; & diuidendo per 2, vt 2. ad B. Quod, &c. Pr. 10. 2. Pr. 9. 2.

Theor. 11. Prop. 12.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumpta non à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum in numerũ ternario maiorem auctus duplo plani ſub eodem numero, & multitudine præcedentium, ad productum ex numero multitudinis præceden-

tium in numerum ternario maiorem auctum binario.

A. 2. B. 3. M. 5. P. 8. E. 40. F. 168.

G $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ H $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{120}$ $\frac{1}{210}$ I ——— ——— ——— ———

K. 30. L. 12. O. 5. C. 10. D. 48.

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum ab vnitate ſint aſſumptæ H, non à prima in multitudine numeri B; quibus in infinitum ſuccedentes I; & præcedentes G, in multitudine numeri A; & productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA, ſit K; ſit etiam O, ternario maior A, & planus AO, ſit C, qui auctus binario fiat L. Dico H, ad I, eſſe vt K, ad L. Fiat M, aggregatum ex A, B; & P, ternario maior M; & planus PM, ſit E; cuius quadruplus auctus numero 8. ſit F: ergo M, eſt multitudo ipſarum

Prop. 5. 2. G, H; & ſunt G, H, æquales E, denominato per F: fiat etiam D, quadruplus L: quoniam L, excedit C, per binarium; etiam D, excedit quadruplum C, per 8; ergo G,

Prop. 5. 2. sũt æquales C, denominato per D; ergo exceſſus G, & H, ſupra G, videlicet H, ſunt æquales exceſſui numeri E, denominati per F, ſupra numerum C, denominatum per D: & quia D, F, excedunt per 8. quadruplos C, E; ergo

Pr. 44. 1. exceſſus fractionũ E, per F, & C, per D, eſt octuplus exceſſus E, C, denominatus per planum DF: quoniam etiam 3. eſt idem exceſſus tùm P, M, tum O, A; viciſſim exceſſus P, O, eſt æqualis exceſſui M, A; videlicet nume-

Prop. 1. 2. ro B; ergo exceſſus planorum PM, OA, videlicet exceſſus E, C, eſt æqualis plano ſub B, & aggregato A, P; eſt autem P, æqualis M, & 3; & M, æqualis A, & B; ergo aggregatum A, P, eſt aggregatum ex B, 3, & duplo A; & planum ſub B, & aggregato A, P, eſt aggregatum ex qua-

quadrato B, triplo B, & duplo plani A B; videlicet productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA; cuiusmodi est numerus K; ergo K, est excessus E, G; & H, sunt æquales octuplo K, denominato per planum DF; ergo H, ad H, G, sunt vt octuplus K, denominatus plano D F, ad E, denominatum per F; & multiplicando per F, vt octuplus K, denominatus per D, ad E; sunt autem G, H, ad I, vt E, ad 2: ergo ex æquo H, ad I, sunt vt octuplus K, denominatus per D, ad 2; & diuidendo per 2. vt quadruplus K, denominatus per D, ad vnitatem; vel vt quadruplus K, ad D; ergo (quia D, est quadruplus L, diuidendo etiam per 4) H, ad I, sunt vt K, ad L. Quod, &c. Prop. 9. 2.

Theor. 12. Prop. 13.

Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt æquales producto numeri multitudinis ipsarum in numerum binario maiorem, denominato per duodecuplum eiusdem, addito semper 9.

Sint A, impares ab vnitate; quorum solidis denominatæ sint vnitates B; quarum multitudo à prima sit numerus C; & C, auctus binario fiat D; & planus CD, sit E; cuius duodecuplus auctus 9 sit G; & ex denominatione E, per G, fiat fractio H. Dico B, esse æquales H. Sint I, K, vltimi, qui adhibentur in denominatione

K 2 B;

A. 1.	3.	5.	I. 7.	K. 9.
B	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	
C. 3.	D. 5.	E. 15.	G. 189.	H. $\frac{15}{189}$

Prop.4.2. B, ergo B, ſunt æquales aggregato ex omnibus diſpoſitis in A, vſque ad K, præter vnitatem, & K, denominato per planoplanum ſub K, I, 3, & vnitate: & quia terni A, denominant ſingulas B; multitudo diſpoſitorum in A, vſque ad K, binario maior eſt multitudine B, videlicet numero C; ergo numerus C, eſt multitudo omnium A, vſq; ad K, præter duos extremos vnitatem, & K; &
Prop.2.2. aggregatum eorumdem, præter extremos, eſt dimidium plani ſub C, & aggregato extremarum vnitatis, & K; & quoniam inter vnitatem, & K, tot ſunt intermedij, quot vnitates in C; ergo exceſſus extremorum vnitatis, & K, ad 2. exceſſum conſequentium eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; & componendo, exceſſus vnitatis, & K, auctus binario, vel aggregatum ex K, & vnitate ad 2. eſt vt C, auctus 2, videlicet D, ad vnitatem; permutandoq; & conuertendo, D, dimidius eſt aggregati ex K, & vnitate; & planum CD, vel numerus E, dimidius eſt
Prop.2.2. plani ſub C, & aggregato ex K, & vnitate; ergo E, eſt aggregatum omnium A, vſq; ad K, præter extremos vnitatem, & K: eadem ratione, quia exceſſus vnitatis, & K, ad 2. eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; diuidendo, exceſſus I, & vnitatis ad 2. eſt vt C, ad vnitatem; permutandoque, & conuertendo, C, dimidius eſt exceſſus I, & vnitatis; & duplus C, auctus vnitate eſt I; & auctus ternario eſt K; & compoſitus ex 3. & quadruplo quadrati C, & octuplo eiuſdem C, videlicet compoſitus ex 3. & quadruplo E, eſt planus I K, & (multiplicando per 3. planum vnitatis & 3.) compoſitus ex 9, & duodecuplo E, videlicet numerus G, eſt planoplanum ſub
Prop.5.2. K, I, 3, & vnitate: ergo B, ſunt æquales E, denominato per G, videlicet fractioni H. Quod, &c. Theor.

Theor. 13. Prop. 14.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aßumptæ à prima sunt minores duodecima parte vnitatis.

C. $\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{105}$.	$\frac{1}{315}$.	$\frac{1}{693}$.	
D. 4.	B. 6.	A. 24.	E. 288.	F. 297.

SInt (quotlibet vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate ſumptæ in multitudine numeri D, à prima. Dico C, aggregatas minores eſſe $\frac{1}{12}$. Fiat B, binario maior D; & planum B D, ſit A; cuius duodecuplus E; qui auctus numero 9. ſit F. Ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & eſt A, ad E, vt vnitas ad 12. ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad 12. & A, denominatus per F, eſt minor $\frac{1}{12}$. Sunt autem C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ sũt minores $\frac{1}{12}$. Quod, &c. Pr.13.2.

Corollarium Primum.

Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis omnium imparium ab vnitate in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis. Pr.15.1.

Co-

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quòd vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.*

Theor. 14. Prop. 15.

Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{1}{12}$.

A ——————————————————————

B — C — D — E — F — G — H — I ——

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ unitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate. Dico A, æqualem esse $\frac{1}{12}$. Alias erit A, maior, uel
Cor. 2. minor $\frac{1}{12}$. Sit maior igitur in aliqua multitudine sumptę
pr.14. 2. à prima unitates in A, dispositæ implent $\frac{1}{12}$: sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui unitate adiecta fiat C;
Def. 10. ergo aliquot unitates in A, dispositæ sumptæ à prima in
Pr. 14. 2. multitudine numeri C, sunt maiores $\frac{1}{12}$: quod est absurdum:

dum: non eſt igitur A, maior $\frac{1}{12}$. Sit minor, & data proportione minoris inęqualitatis A, ad $\frac{1}{12}$, inueniatur altera maior, quæ ſit numeri I, quem numerus 12. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipſius D, ſit nonuplus F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per ſe ipſum auctum binario, & ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudine numeri G; & aſſumptarum ſumma ſit H: conſtat H, eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex numero G, in ſe ipſum binario auctum denominato per duodecuplum eiuſdem producti addito 9: quia autem productus ex G, in ſe ipſum binario auctum non eſt minor F; etiam denominatus per duodecuplum eiuſdem producti addito 9. nō eſt minor F, denominato per duodecuplum F, addito 9; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per 9.) non eſt minor D, denominato per duodecuplum D, auctum vnitate; eſt autem I, duodecuplus D; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed quia D, ad I, eſt vt unitas ad 12. uel $\frac{1}{12}$ ad unitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{12}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, uel D, denominatus per E, ad unitatē habet maiorem proportionē, quàm A; maior igitur eſt D, denominatus per E, quàm A; & non eſt H, minor D, denominato per E; ergo H, eſt maior A, pars toto; quod eſt abſurdum: Non igitur A, minor eſt $\frac{1}{12}$, neque maior: ergo A, eſt æqualis $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Pr.25.1.

Prop.7.2.

Pr.13.2.

Pr.44.1.

Theor. 15. Prop. 16.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima *ma ad succedentes in infinitum sunt, vt quadruplum plani sub numero multitudinis assumptarum, & numero binario maiore ad ternarium.*

C —— D —— F —— E ——
A ———— B ————————————

VNitatum, quæ denominantur solidis omnium impa-
rium ab vnitate sint quotlibet assumptę A, in mul-
titudine numeri C, & succedentes in infinitum B, Pla-
nus etiam sub C, & numero binario maiore sit D, cuius
quadruplus F, & duodecuplus E. Dico A, ad B, esse vt
F, ad 3. Et quia C, est multitudo magnitudinum A; &
D, est planus sub C, & numero binario maiore; & E, duo-
Pr. 18. 2. decuplus D; ergo A, sunt æquales D, denominato per E,
pr. 18. 2. auctum nouenario; & aggregatæ A, B, sunt æquales vni-
tati denominatæ per 12. Ergo A, ad aggregatas A, B,
sunt vt D, denominatus per E, auctum 9. ad $\frac{1}{12}$. & (mul-
tiplicando per 12.) vt E, denominatus per se ipsum au-
ctum 9. ad vnitatem, videlicet vt E, ad E, auctum 9. &
diuidendo per 3, vt F, ad F, auctum 3; ergo diuidendo,
A, ad B, sunt vt F, ad 3. Quod, &c.

Theor. 16. Propos. 17.

Vnitatum, quæ denominantur solidis imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ ad vltimam sunt, vt productum ex quadruplo

qua-

quadrati multitudinis aßumptarum vnitate minuto in idem quadratum auctum duplo lateris, ad sexcuplum eiusdem lateris auctum ternario.

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

SInt in multitudine numeri E, assumptæ A, vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate; quarum ultima B; & sit G, quadratum ipsius E, auctum duplo lateris eiusdem; & M, quadruplum eiusdem quadrati unitate minutum; & L, sexcuplum eiusdem E, auctum 3. Dico A, ad B, esse ut planum G M, ad L. Sit H, duodecuplum G, auctum nouenario: constat A, æquales esse G, denominato per H: fiat C, unitate minor E; & quadratum C, auctum duplo eiusdem sit D; cuius duodecuplus auctus 9. sit F; quia C, est unitate minor E, numero multitudinis A; constat C, esse multitudinem A, præter B; & A, præter B, æquales, esse D, denominato per F: tandem fiat K, nonuplus excessus G, D; constat etiam B, æqualem esse K, denominato per planum F H; & quoniam C, est æqualis E, unitate minuto; quadratum C, est æquale unitati, & quadrato E, dempto duplo E; & (adiecto communi duplo C, uel duplo E, binario minuto) quadratum C, una cum duplo C, uidelicet numerus D, æqualis est quadrato E, unitate minuto; est autem G æqualis eidem quadrato aucto duplo E; igitur excessus G, D, est duplus E, auctus unitate; cuius triplus est sexcuplus E, auctus 3; huiusmodi est numerus L; ergo L, est triplus excessus G, D; & excessus G, D, est nona pars numeri K; ergo ex æquo L, ad Pr. 13. 2. Pr. 13. 2. Pr. 44. 1.

B. 4. E. 5. F. 6. D. 7.
A, A $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{24}$ $\frac{2}{60}$ C $\frac{2}{12}$;

Prop. 5. 2. ipſarum, A; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum B D, auctum 8; ſed quadruplum BD, auctum 8 eſt quadruplum plani B D, aucti 2; videlicet plani E F; ergo A, ſunt æquales plano B D, denominato per quadruplum E F: quia etiam B, eſt numerus multitudinis A, quarum vltima C; conſtat B, eſſe numerum ordinis C; & binario, ac vnitate minorem eſſe numeris, qui ſolidum producunt denominatorem C; ergo C, eſt vnitas denominata ſolido ſub B, & plano E F; ergo A, ad C, eſt vt planum B D, denominatum quadruplo plani E F, ad vnitatem denominatam ſolido ſub B, & plano E F; & multiplicando per planum E F, vt planum B D, denominatum per 4. ad vnitatem denominatam per B; & iterum multiplicando per B, vt ſolidum ſub quadrato B, & D; videlicet aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, denominatum per 4. ad vnitatem; & multiplicando per 4, vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate; qualibet aſſumpta ad ſuccedentes in infinitum eſt, vt binarius ad numerum ordinis aſſumptæ.

Sint

B. 3 D $\frac{9}{40}$ A $\frac{1}{60}$ C ————

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium numerorum conſequentium ab vnitate ſit aſſumpta A; cuius ordinis numerus B; & ſuccedentes in infinitum C. Dico A, ad C, eſſe vt binarius ad B. Sit D, aggregatum earum, quæ præcedunt C, à prima; quarum erit A, vltima; & numerus multitudinis ipſarum D, idem, qui ordinis aſſumptæ, videlicet B: ergo A, ad D, eſt vt 4. ad compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B; ſunt autem D, ad C, vt planum ſub B, & ipſo B, ternario aucto; videlicet vt compoſitum ex quadrato B, & triplo B, ad binarium; & multiplicando per B, vt compoſitum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad duplum B; ergo ex æquo A, ad C, eſt vt 4. ad duplum B; & diuidendo per 2, vt 2. ad B. Quod, &c. Pr. 10. 2. Pr. 9. 2.

Theor. 11. Prop. 12.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omniũ numerorum ab vnitate, quotlibet aſſumpta non à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex numero multitudinis ipſarum in numerũ ternario maiorem auctus duplo plani ſub eodem numero, & multitudine præcedentium, ad productum ex numero multitudinis præcedentium

 tium

tium in numerum ternario maiorem au-ctum binario.

A. 2. B. 3. M. 5. P. 8. E. 40. F. 168.

G $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ H $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{120}$ $\frac{1}{210}$ I ——— ——— ——— ———

K. 30. L. 12. O. 5. C. 10. D. 48.

VNitatum, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitate sint assumptæ H, non à prima in multitudine numeri B; quibus in infinitum succedentes I; & præcedentes G, in multitudine numeri A; & productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA, sit K; sit etiam O, ternario maior A, & planus AO, sit C, qui auctus binario fiat L. Dico H, ad I, esse vt K, ad L. Fiat M, aggregatum ex A, B; & P, ternario maior M; & planus PM, sit E; cuius quadruplus auctus numero 8. sit F: ergo M, est multitudo ipsarum
Prop. 5. 2. G, H; & sunt G, H, æquales E, denominato per F: fiat etiam D, quadruplus L: quoniam L, excedit C, per binarium; etiam D, excedit quadruplum C, per 8; ergo G,
Prop. 5. 2. sũt æquales C, denominato per D; ergo excessus G, & H, supra G, videlicet H, sunt æquales excessui numeri E, denominati per F, supra numerum C, denominatum per D: & quia D, F, excedunt per 8. quadruplos C, E; ergo
Pr. 44. 1. excessus fractionũ E, per F, & C, per D, est octuplus excessus E, C, denominatus per planum D F: quoniam etiam 3. est idem excessus tùm P, M, tum O, A; viciſſim excessus P, O, est æqualis excessui M, A; videlicet nume-
Prop. 1. 2. ro B; ergo excessus planorum PM, OA, videlicet excessus E, C, est æqualis plano sub B, & aggregato A, P; est autem P, æqualis M, & 3; & M, æqualis A, & B; ergo aggregatum A, P, est aggregatum ex B, 3, & duplo A; & planum sub B, & aggregato A, P, est aggregatum ex qua-

quadrato B, triplo B, & duplo plani A B; videlicet productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA; cuiusmodi est numerus K; ergo K, est excessus E, G; & H, sunt æquales octuplo K, denominato per planum DF; ergo H, ad H, G, sunt vt octuplus K, denominatus plano D F, ad E, denominatum per F; & multiplicando per F, vt octuplus K, denominatus per D, ad E; sunt autem G, H, ad I, vt E, ad 2: ergo ex æquo H, ad I, sunt vt octuplus K, denominatus per D, ad 2; & diuidendo per 2. vt quadruplus K, denominatus per D, ad vnitatem; vel vt quadruplus K, ad D; ergo (quia D, est quadruplus L, diuidendo etiam per 4) H, ad I, sunt vt K, ad L. Quod, &c. Prop.9.2.

Theor. 12. Prop. 13.

Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt æquales producto numeri multitudinis ipsarum in numerum binario maiorem, denominato per duodecuplum eiusdem, addito semper 9.

SInt A, impares ab vnitate; quorum solidis denominatæ sint vnitates B; quarum multitudo à prima sit numerus C; & C, auctus binario fiat D; & planus CD, sit E; cuius duodecuplus auctus 9 sit G; & ex denominatione E, per G, fiat fractio H. Dico B, esse æquales H. Sint I, K, vltimi, qui adhibentur in denominatione

K 2 B;

A. 1.	3.	5.	I. 7.	K. 9.
B	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{315}$	
C. 3.	D. 5.	E. 15.	G. 189.	H. $\frac{15}{189}$

Prop.4.2. B, ergo B, ſunt æquales aggregato ex omnibus diſpoſitis in A, vſque ad K, præter vnitatem, & K, denominato per planoplanum ſub K, I, 3, & vnitate: & quia terni A, denominant ſingulas B; multitudo diſpoſitorum in A, vſque ad K, binario maior eſt multitudine B, videlicet numero C; ergo numerus C, eſt multitudo omnium A, vſq; ad K, præter duos extremos vnitatem, & K; &
Prop.2.2. aggregatum eorumdem, præter extremos, eſt dimidium plani ſub C, & aggregato extremarum vnitatis, & K; & quoniam inter vnitatem, & K, tot ſunt intermedij, quot vnitates in C; ergo exceſſus extremorum vnitatis, & K, ad 2. exceſſum conſequentium eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; & componendo, exceſſus vnitatis, & K, auctus binario, vel aggregatum ex K, & vnitate ad 2. eſt vt C, auctus 2, videlicet D, ad vnitatem; permutandoq; & conuertendo, D, dimidius eſt aggregati ex K, & vnitate; & planum CD, vel numerus E, dimidius eſt
Prop.2.2. plani ſub C, & aggregato ex K, & vnitate; ergo E, eſt aggregatum omnium A, vſq; ad K, præter extremos vnitatem, & K: eadem ratione, quia exceſſus vnitatis, & K, ad 2. eſt vt C, auctus vnitate ad vnitatem; diuidendo, exceſſus I, & vnitatis ad 2. eſt vt C, ad vnitatem; permutandoque, & conuertendo, C, dimidius eſt exceſſus I, & vnitatis; & duplus C, auctus vnitate eſt I; & auctus ternario eſt K; & compoſitus ex 3. & quadruplo quadrati C, & octuplo eiuſdem C, videlicet compoſitus ex 3. & quadruplo E, eſt planus I K, & (multiplicando per 3. planum vnitatis & 3.) compoſitus ex 9, & duodecuplo E, videlicet numerus G, eſt planoplanum ſub
Prop.5.2. K, I, 3, & vnitate: ergo B, ſunt æquales E, denominato per G, videlicet fractioni H. Quod, &c. Theor.

Theor. 13. Prop. 14.

Vnitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ſunt minores duodecima parte vnitatis.

C. $\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{105}$.	$\frac{1}{315}$.	$\frac{1}{693}$.	
D. 4.	B. 6.	A. 24.	E. 288.	F. 297.

SInt (quotlibet vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate ſumptæ in multitudine numeri D, à prima. Dico C, aggregatas minores eſſe $\frac{1}{12}$. Fiat B, binario maior D; & planum B D, ſit A; cuius duodecuplus E; qui auctus numero 9. ſit F. Ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & eſt A, ad E, vt vnitas ad 12. ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam vnitas ad 12. & A, denominatus per F, eſt minor $\frac{1}{12}$. Sunt autem C, aggregatæ æquales A, denomi- Pr.13.2.
nato per F; ergo C, aggregatæ sũt minores $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Vnde conſtat vnitates denominatas ſolidis Pr.15.1.
omnium imparium ab vnitate in infinitum diſpoſitas, & aggregatas eſſe finitæ extenſionis.

Co-

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quòd vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.*

Theor. 14. Prop. 15.

Vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab vnitate, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{1}{12}$.

A ——————————————————

B — C — D — E — F — G — H — I ——

Sint in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ unitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate. Dico A, æqualem esse $\frac{1}{12}$. Alias erit A, maior, uel
Cor. 2. pr. 14. 2. minor $\frac{1}{12}$. Sit maior igitur in aliqua multitudine sumptę à prima unitates in A, dispositæ implent $\frac{1}{12}$: sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui unitatę adiecta fiat C;
Def. 10. ergo aliquot unitates in A, dispositæ sumptæ à prima in
Pr. 14. 2. multitudine numeri C, sunt maiores $\frac{1}{12}$: quod est absurdum:

dum: non eſt igitur A, maior $\frac{1}{12}$. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{12}$, inueniatur altera maior, quæ ſit numeri I, quem numerus 12. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipſius D, ſit nonuplus F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per ſe ipſum auctum binario, & ſumantur vnitates in A, diſpoſitæ à prima in multitudine numeri G; & aſſumptarum ſumma ſit H: conſtat H, eſſe portionem ipſius A; & æqualem producto ex numero G, in ſe ipſum binario auctum denominato per duodecuplum eiuſdem producti addito 9: quia autem productus ex G, in ſe ipſum binario auctum non eſt minor F; etiam denominatus per duodecuplum eiuſdem producti addito 9. nõ eſt minor F, denominato per duodecuplum F, addito 9; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per 9.) non eſt minor D, denominato per duodecuplum D, auctum vnitate; eſt autem I, duodecuplus D; & I, auctus vnitate eſt E; ergo H, non eſt minor D, denominato per E: ſed quia D, ad I, eſt vt unitas ad 12. uel $\frac{1}{12}$ ad unitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{12}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, uel D, denominatus per E, ad unitatẽ habet maiorem proportionẽ, quàm A; maior igitur eſt D, denominatus per E, quàm A; & non eſt H, minor D, denominato per E; ergo H, eſt maior A, pars toto; quod eſt abſurdum: Non igitur A, minor eſt $\frac{1}{12}$, neque maior; ergo A, eſt æqualis $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Pr.25.1.

Prop.7.2.

Pr.13.2.

Pr.44.1.

Theor. 15. Prop. 16.

Vnitates denominatæ ſolidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima *quadrati multitudinis aßumptarum vnitate minuto in idem quadratum auctum duplo lateris, ad sexcuplum eiusdem lateris auctum ternario.*

	C. 3.	E. 4.	G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$	B. $\frac{1}{693}$		H. 297. K. 81. F. 189.

SInt in multitudine numeri E, assumptæ A, vnitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate; quarum ultima B; & sit G, quadratum ipsius E, auctum duplo lateris eiusdem; & M, quadruplum eiusdem quadrati unitate minutum; & L, sexcuplum eiusdem E, auctum 3. Dico A, ad B, esse ut planum G M, ad L. Sit H, duodecuplum G, auctum nouenario: constat A, æquales esse G, denominato per H: fiat C, unitate minor E; & quadratum C, auctum duplo eiusdem sit D; cuius duodecuplus auctus 9. sit F; quia C, est unitate minor E, numero multitudinis A; constat C, esse multitudinem A, præter B; & A, præter B, æquales, esse D, denominato per F: tandem fiat K, nonuplus excessus G, D; constat etiam B, æqualem esse K, denominato per planum F H; & quoniam C, est æqualis E, unitate minuto; quadratum C, est æquale unitati, & quadrato E, dempto duplo E; & (adiecto communi duplo C, uel duplo E, binario minuto) quadratum C, una cum duplo C, uidelicet numerus D, æqualis est quadrato E, unitate minuto; est autem G æqualis eidem quadrato aucto duplo E; igitur excessus G, D, est duplus E, auctus unitate; cuius triplus est sexcuplus E, auctus 3; huiusmodi est numerus L; ergo L, est triplus excessus G, D; & excessus G, D, est nona pars numeri K; ergo ex æquo L, ad Pr. 13. 2. Pr. 13. 2. Pr. 44. 1.

C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.

A. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ B. $\frac{1}{693}$ H. 297. K. 81. F. 189.

K, eſt vt 3. ad 9. & conuertendo K, triplus eſt ad L: quia diximus D, æqualem eſſe quadrato E, vnitate minuto; duodecuplus ipſius D, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 12; & (adiecto communi 9.) duodecuplus D, auctus 9. videlicet numerus F, eſt æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 3; cuius tertia pars eſt quadruplus quadrati E, minutus vnitate; huiuſmodi eſt numerus M; ergo M, tertia pars eſt ipſius F; & conuertendo F, triplus eſt ad M; videlicet, vt K, ad L; permutandoq; & conuertendo K, ad F, eſt vt L, ad M; ergo K, denominatus per F, æqualis eſt L, denominato per M: quia etiam diximus A, æquales eſſe G, denominato per H; & B, æqualem K, denominato per planum FH; ergo A, ad B, ſunt vt G, denominatus per H, ad K, denominatum per FH; & multiplicando per H, vt G, ad K, denominatum per F; videlicet vt G, ad L, denominatum per M; ergo (multiplicando per M,) A, ad B, ſunt ut planum GM, ad L. Quod, &c.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatũ, quæ denominãtur ſolidis imparium ab vnitate, qualibet aſſumpta ad ſuccedẽtes in infinitum eſt, vt octuplus numeri ordinis aſſumptæ auctus 4. ad quadruplum quadrati eiuſdem vnitate minutum.

Vni-

A $\frac{5}{63}$ B $\frac{1}{315}$ C —— —— —— ——
G 15 E. 3 D. 35. F. 7

VNitatum, quæ denominantur solidis imparium ab vnitate sit assumpta B; cuius ordinis numerus E;& ipsi B, succedentes in infinitum C; sit etiam D, quadruplus quadrati E, vnitate minutus; & F, duplus E, auctus vnitate. Dico B, ad C, esse vt quadruplus F, ad D. Aggregentur in A, tùm B, tùm quæ ipsam B, præcedunt à prima: quia E, est numerus ordinis B; est etiã multitudinis collectarum in A: fiat G, æqualis quadrato E, aucto duplo lateris eiusdem; quoniam igitur B, ad A, sunt vt sexcuplum E, auctum 3; videlicet vt triplus F, ad planum G D; sunt autem A, ad C, vt quadruplum G, ad 3; & diuidendo per 4. vt G, ad $\frac{3}{4}$; & multiplicando per D, vt planum G D, ad triplum D, denominatum per 4; ergo ex æquo B, ad C, sunt vt triplus F, ad triplum D, denominatum per 4; & diuidendo per 3, vt F, ad D, denominatum per 4; & multiplicando per 4, B, ad C, sunt vt quadruplus F, ad D. Quod, &c. Pr. 17. 2. Pr. 16. 2.

Theor. 18. Prop. 19.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab vnitate, quotlibet assumpta non à prima, ad succedentes in infinitum sunt, vt planus numeri assumptarum, & numeri binario maioris auctus duplo plani sub numeris assumptarum, & præcedentium, ad planum sub numero præceden-

 tium,

tium, & numero binario maiore auctum ſemper fractione in qua 3. denominatur per 4.

A. 3. B. 2. L. 8. M. 12.

D $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{105}$ $\frac{1}{315}$ E. $\frac{1}{693}$ $\frac{1}{1287}$ C —— —— ——

F. 15. K. 20. H. 35. G. 189. I. 429.

VNitatum, quæ denominantur ſolidis omnium imparium ab vnitate ſint aſſumptæ E, non à prima in multitudine numeri B; quas in infinitum ſuccedentes C; & præcedentes D, in multitudine numeri A; ſit autem L, planus numeri B, & numeri binario maioris; & M, duplus plani ſub numeris A, B; & F, planus numeri A, & numeri binario maioris. Dico E, ad C, eſſe, vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$ vnitatis. Fiat G, nouenario maior duodecuplo ipſius F; & H, productus ex aggregato A, B, in numerum binario maiorem; & I, no-
Pr. 13. 2. uenario maior duodecuplo ipſius H: conſtat D, æquales eſſe F, denominato per G; & D, E, ſimul æquales H, de-
Pr. 44. 1. nominato per I; & E, æquales nonuplo exceſſus H, F, denominato per planum G I; ſit K, exceſſus H, I; ergo E, ad aggregatas A, E, ſunt vt nonuplus K, denominatus plano G, ad H, denominatum per I; & multiplicando per I, vt nonuplus K, denominatus per G, ad H; & multiplicando per 4. vt quater nonuplus, vel ter duodecuplus K,
Pr. 16. 2. denominatus per G, ad quadruplum H; ſunt autem aggregatæ A, E, ad C, vt quadruplus H, ad 3; ergo ex æquali E, ad C, ſunt ut ter duodecuplus K, denominatus per G, ad 3; & diuidendo per 3; vt duodecuplus K, denominatus per G, ad vnitatem; & multiplicando per G, vt duodecuplus K, ad G, vel ad duodecuplum F, auctum

9; &

9; & diuidendo per 12. vt K, ad F, auctum $\frac{9}{12}$, vel $\frac{3}{4}$: & quoniam sunt quatuor magnitudines A, aggregatum ex A, B, & numeri binario maiores ipsis, eodem excessu B, se se excedentes; ergo planum sub maioribus, videlicet H, excedit planum sub minoribus, videlicet F, plano sub B, & aggregato ex maxima, & minima, videlicet ex binario, B, & duplo A; planum autem sub B, & composito ex binario, & B, est L; & planum sub B, & duplo A, est M; ergo excessus H, F, videlicet K, est æqualis aggregato L, M; ergo E, ad C, sunt vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{3}{4}$. Quod, &c. Prop. 1. 2.

Theor. 19. Prop. 20.

Vnitatum, quæ denominantur solidis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assumpta à prima, sunt æquales fractioni, cuius numerator est multiplex plani sub multitudine assũptarum, & excessu aucti excessu, & binario, per eamdẽ multitudinem; denominator verò multiplex numeratoris per duplum compositi ex quadrato, & numero excessus, auctus duplo quadrato compositi ex eodem excessu, & vnitate.

Sint

A $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{280}$ $\frac{1}{910}$ $\frac{1}{2080}$ $\frac{1}{3952}$ $\frac{1}{6688}$ $\frac{1}{10450}$

B. 3. C. 7. D. 21. E. 24. F. 25. G. 26.

L. 4. N. 22. I. 24. H. 182. K. 4368.

SInt A, vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum ab vnitate cum excessu B, sumptæ in multitudine numeri C; sit autem D, planum C B; & D, auctus B, fit E; quo singulis duabus vnitatibus aucto fiant F, & G: constat G, esse æqualem plano C B, aucto B, & binario: & quia C, est multitudo A; & terni Arithmeticè dispositi denominant singulas A; ergo numerus binario maior C, est multitudo eorum, qui adhibetur in denominatione sumptarum A; & propterea C, multitudo est intermediorum, præter extremos; sed quot sunt intermedij, totuplex est excessus penultimi, & vnitatis ad excessum consequentium; ergo planum B C, videlicet numerus D, est excessus penultimi, & vnitatis; & D, auctus B, videlicet E, est excessus vltimi, & vnitatis; & E, auctus vnitate videlicet F, est vltimus; & G aggregatum extremorum F, & unitatis: ex ductu G, in C, Pr. 2. 2. fiat H; constat etiam H, esse duplum aggregati intermediorum. Sit I, duplum compositi ex quadrato, & numero B; & ex ductu H, in I, fiat K; & compositum ex B, & unitate sit L; constat L, esse secundum Arithmeticè dispositorum ab unitate. Dico A, æquales esse H, denominato per compositum ex K, & duplo quadrati L. Fiat N, compositus ex D, & vnitate; constat N, esse penultimum Arithmeticè dispositorum ab unitate; ergo dispositionis Arithmeticæ primi sunt vnitas, & L; ultimi uero N, & F; & extremi unitas, & F: quoniam unitas ad duplum B; pr. 3. 2. vel H, ad duplum plani B H; vel dimidium H, ad planum B H, est vt aggregatum intermediorum ad excessum plani N F, super L, planum unitatis, & L; est autem aggregatum

gatum intermediorum dimidium H; ergo excessus plani N L, super L, est planum B H; & planum N F, est æquale plano B H, & L; & solidum L N F, est æquale solido L B H, aucto quadrato L; quoniam autem L, est æqualis B, & unitati; planum L B, est æquale composito ex quadrato B, & numero B; videlicet dimidio I; ergo solidum L B H, est æquale dimidio plani H I; uidelicet dimidio K; ergo solidum L N F, uel planoplanum unitatis, L, N, & F, est dimidium K, auctum quadrato L; ergo A sunt æquales dimidio H, denominato per dimidium K, auctum quadrato L; & multiplicando utrumque numerum fractionis per 2. sunt æquales H, denominato per K, auctum duplo quadrato L. Quod, &c. Pr.4.2.

Theor. 20. Prop. 21.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium Arithmeticè dispositorum ab vnitate, quotlibet assumptæ à prima sunt minores vnitate denominata duplo compositi ex quadrato, & numero excessus.

C —— —— —— —— —— ——

D —— E —— F —— G ——

SInt C, quotlibet unitates denominatæ solidis omniũ Arithmeticè dispositorum ab unitate, sumptæ in qualibet multitudine à prima; & sit D, duplum compositi ex quadrato, & numero excessus dispositionis Arithmeticæ. Dico C, minores esse unitate denominata D. Sit

E,

E, multiplex plani multitudinis assumptarum, aucti numero excessus, & binario, per eamdem multitudinem; & F, multiplex E, per D; & G, duplum quadrati compositi
Pr. 20. 2. ex eodem excessu, & unitate; ergo C, sunt æquales E; denominato per F, auctum G; & C, ad unitatem sunt ut E; denominatus per F, auctum G, ad unitatem; uidelicet ut E, ad compositum ex F, & G; habet autem E; ad compositum ex F, & G, minorem proportionē quàm
.2. E, ad F; & E, ad F, est ut unitas ad D; uel ut unitas denominata per D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem habent minorem proportionem, quàm unitas denominata per D; ad eamdem unitatem; ergo C, sunt minores unitate denominata per D. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Pr.15.1. *Vnde constat vnitates denominatas solidis omnium numerorum Aritbmeticè dispositorum ab vnitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.*

Corollarium Secundum.

Pr.16.1. *Patet etiam, quod vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earundem in infinitum.*

Probl.

Probl. 2. Prop. 22.

Datis tribus numeris, quartum inuenire, qui non minorem primo dato metiatur per planum sui ipsius, & alterius dati, auctum tertio dato.

B. 41. C. 4. D. 2. E. ℞. 168. F. ℞. 2 $\frac{5}{8}$ G. $\frac{1}{4}$ A. 3.

SInt B, C, D, tres numeri dati, opportet inuenire quartum, qui metiatur numerum non minorem dato B, per planum sui ipsius, & C, auctum D. Aggregati ex quadrato D, & quadruplo plani B C, sit radix quadrata E; quæ diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens F: item D, diuidatur per duplum C, vt fiat quotiens G, & sit A, non minor excessu F, G. Dico A, metiri numerum non minorem B, per planum A C, auctum D. Quoniam A, non est minor excessu F, G; ergo aggregatum A G, non est minus F; & (multiplicando per duplum C,) duplum aggregati ex planis A C, G C, non est minus duplo plani F C: & quia G, est quotiens diuisionis D, per duplum C; duplum plani G C, est numerus D: item quia F, est quotiens diuisionis E, per duplum C; duplum plani F C, est E; ergo aggregatum ex duplo plani A C, & D, non est minus E; & quadratum aggregati ex duplo plani A C, & numero D, videlicet aggregatum ex quadruplo planoplani quadratorum A, C, & quadruplo solidi A C D, & quadrato D, non est minus quadrato E, videlicet aggregato ex quadrato D, & quadruplo plani B C; & (dempto prius communi quadrato D, nec non diuidendo per quadruplum C,) aggregatum solidi sub C, & quadrato A, & plani A D, non est minus B: sed A, metitur aggregatum solidi sub C, & quadrato A, & plani AD, per planum AC, auctum D; ergo A, metitur numerum non minorem B, per planum AC, auctum D. Quod, &c.

Theor. 21. Prop. 23.

Vnitates denominatæ solidis omnium numerorum Arithmeticæ dispositionis ab vnitate, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ per duplum compositi ex quadrato; & numero excessus consequentiũ eiusdem dispositionis.

A ——————————— L. 24. M. $\frac{1}{24}$

B — C — I — D — E — F — N. 16. O. 3. P. 5. G ——

H ———————————

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ solidis omnium numerorum Arithmeticæ dispositionis ab vnitate; & sit L, duplus compositi ex quadrato, & numero excessus consequentium eiusdem Arithmeticæ dispositionis; & M, sit vnitas denominata per L. Dico, quod A, est æqualis M. Aliàs erit A, maior, vel minor M. Sit maior; igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima vnitates in A, dispositæ implent M: sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui

Coroll. 2. pr. 21. 2.

vnitate

vnitate adiecta fiat C; ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sumptę à prima in multitudine numeri G, sunt maiores M; quod est absurdum: non est igitur A, maior M. Sit minor; & data proportione minoris inæqualitatis A, ad M, inueniatur altera maior, quæ sit numeri I, quem L, metiatur per D, ad E, numerum vnitate maiorem; & & ipsius D, fiat multiplex F, per N, quadratum compositi ex excessu consequentium, & vnitate; & datis tribus numeris F, excessu dispositionis O, & P, aggregato ex O, & binario, quartus inueniatur G, qui metiatur numerum non minorem F, per planum GO, auctum P; & sumantur vnitates in A, dispositæ à prima in multitudine numeri G; & assumptarum summa sit H: constat H, esse portionem ipsius A; & æqualem producto ex numero G, in planum GO, auctum P, denominato per multiplex eiusdem producti secundum L, auctum N: quia autem productus ex G, in planum GO, auctum P, non est minor F; etiam denominatus per sui ipsius multiplicẽ secundum L, auctum N, non est minor F, denominato per multiplicem F, secundum L, auctum N; & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per N,) non est minor D, denominato per multiplicem D, secundum L, auctum vnitate; est autem I, multiplex D, secundum L; & I, auctus vnitate est E; ergo H, non est minor D, denominato per E: sed, quia D, ad I, est vt vnitas ad L; vel vt M, (vnitas denominata per L,) ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad M; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionẽ, quam A; maior igitur est D, denominatus per E, quam A; & non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est maior A, pars toto, quod est absurdum: non igitur A, minor est M, neque maior: ergo A, est æqualis M. Quod, &c.

Def. 10.
Pr. 21. 2.
Pr. 25. 1.
Pr. 22. 2.
Pr. 20. 2.
Pr. 44. 1.

Theor. 22. Propoſ. 24.

Vnitates denominatæ ſolidis numerorũ Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, quotlibet aſſumptæ à prima ad ſuccedentes in infinitum ſunt, vt productus ex plano exceſſus conſequentium Arithmeticè diſpoſitorum, & multitudinis aſſumptarum ducto in ſe ipſum auctum eodem exceſſu, & binario, ad compoſitum ex eodem exceſſu, & vnitate.

A.2. B.3. D.6. C.11. L.22. E.66. F.4. I.12. G.264. H.16.
R. $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{280}$ S —— —— —— —— —— —— ——

SInt R, quotlibet vnitates denominatæ ſolidis numerorum Arithmeticè diſpoſitorum ab vnitate, cum exceſſu B, ſumptæ à prima in multitudine numeri A; ſuccedentes verò in infinitum ſint diſpoſitæ, & aggregatæ in S; & planum AB, ſit D; & D, auctus B, & binario ſit C; & exductu C, in A, fiat L; & ex L, in B, fiat E: conſtat E, eſſe productum ex D, in C: ſit F, compoſitus ex B, & vnitate. Dico R, ad S, eſſe, vt E, ad F. Ducatur F, in B, vt fiat I: conſtat I, eſſe compoſitum ex quadrato, & numero B: ducatur etiam F, in E, vt fiat G: quoniam E, eſt productus LB; ergo G, eſt productus LBF; eſt autem I, productus BF; ergo G, eſt productus

L I: fiat ipsius F, quadratum H: constat R, esse æquales L, denominato per duplum G, auctum duplo H; & aggregatas R, S, æquales esse vnitati denominatæ per duplum I; Ergo R, ad aggregatas R, S, ita se habent vt L, denominatus per duplum G, auctum duplo H, ad vnitatem denominatam duplo I; & multiplicando per 2. vt L, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem denominatam per I; & multiplicando per I, vt productum L I, videlicet G, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem; & (multiplicando per G, auctum H,) ita se habent R, ad aggregatas R, S, vt G, ad compositum ex G, H; & diuidendo, R, ad S, ita se habent vt G, ad H; uidelicet ut planum F E, ad quadratum F; & (diuidendo per F,) sunt R, ad S, ut E, ad F. Quod, &c. Pr. 20. 2. Pr. 23. 2.

Theor. 23. Prop. 25.

Productus duorum laterum est maior, quàm vt ad eorumdem differentiam sit, vt minus latus ad vnitatem; & excessus est minoris lateris quadratus.

A. 5. C. 3. B. 2.

Sint duæ magnitudines A, B; quarum sit B, minor; & differentia C. Dico quod productus AB, minutus quadrato B, ad C, est vt B, ad vnitatem. Quoniã A, æqualis est aggregato C, B; productus AB, est æqualis aggregato producti C B, & quadrati B; ergo produ-

ctus

ctus AB, minutus quadrato B, est æqualis producto CB; est autem productus CB, ad C, vt B, ad vnitatem; ergo productus AB, minutus quadrato B, ad C, est vt B, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 24. Prop. 26.

Vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum, quotlibet assumptæ sunt minores vnitate denominata solido sub duplo excessu, & minimis numeris.

B. 2. C. 5. 8. E. 11. F. 14.

A $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ D. 6.

Sint in A, dispositæ quotlibet vnitates denominatæ solidis Arithmeticè dispositorum; quorum primus B; secundus C; & duplus excessus consequentium D. Dico A, minores esse vnitate denominata solido BCD. Arithmeticè dispositorum, qui adhibentur in denominatione vnitatum A, sint penultimus E, & vltimus F: Pr. 4. 2. ergo A, sunt æquales aggregato ex intermedijs, præter B, F, denominato per planoplanum BCEF; ergo A, ad vnitatem sunt, vt aggregatum ex intermedijs præter B, F, ad planoplanum BCEF; videlicet proportionem habent compositã ex proportionibus intermediorũ præter B, F, ad excessum planorum EF, BC, & huius excessus Prop. 3. 2. ad planoplanum BCEF: est autem proportio intermediorum præter B, F, ad excessum planorum EF, BC,

eadem

eadem proportioni vnitatis ad D; & proportio ex cessus Pr.25.2.
planorum EF, BC, ad planoplanum BCEF, minor proportione vnitatis ad planum BC; vel multiplicando per D, minor proportione D, ad solidum DBC; ergo ex æquo proportio intermediorum præter AF, ad planoplanum BCEF, minor est proportione vnitatis ad solidum DBC; & aggregatum intermediorum præter B, F, denominatum planoplano BCEF; videlicet A, minor est vnitate denominata solido DBC. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Vnde constat vnitates denominatas solidis numerorum Arithmeticè dispositorum in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis. Pr.15.1.

Corollarium Secundum.

Patet etiam, quod vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum in aliqua multitudine sunt à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarũ earumdẽ in infinitũ. Pr.16.1.

Theor.

Theor. 25. Prop. 27.

Vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ solido sub duplo excessu, & minimis numeris.

A. 2. B. 5. C. 3.

D ——————————— G. $\frac{1}{60}$

H ——— K ———

SInt numerorum Arithmeticè dispositorum minimi numeri A, B; quorum excessus C; & vnitates denominatæ solidis eorumdem in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint in D; & vnitas denominata solido sub duplo C, & plano AB, sit G. Dico D, esse æqualem G.
Coroll. 2. Alias erit D, maior, vel minor G: sit maior; igitur in ali-
pr. 26. 2. qua multitudine sumptæ D, à prima implent G: sit
huiusmodi multitudinis numerus H, qui vnitate adiecta
Def. 10. fiat K; ergo aliquot dispositæ à prima magnitudines D,
Pr. 26. 2. sumptæ in multitudine numeri K, sunt maiores G: quod est absurdum: non est igitur D, maior G.

Sit D, minor G; & sit defectus I; & vt I, ad G, ita fiat plani AB, quadratus ad Q; & ex diuisione Q. per planũ
Pr. 7. 2. A B, fiat M; & inueniatur numerus N, qui multiplicando se ipsum auctum numero C, producat numerum non minorem

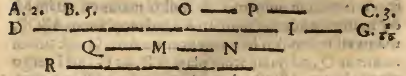
A. 2. B. 5. O —— P —— C. 3.
D ———————————————— I —— G. $\frac{1}{18}$
Q —— M —— N ——

minorem M; & inter Arithmeticè diſpoſitos inueniantur duo numeri conſequentes O, P, maiores numero N; ergo etiam planum O P, maius eſt plano numeri N, ducti in ſeipſum auctum numero C; & multò maius eſt, quam M; & (multiplicando per planum AB,) planoplanum ABOP, maius eſt ſolido A B M, videlicet numero Q; eſt autem numerus Q, ad quadratum plani A B, vt G, ad I; ergo planoplanum ABOP, ad quadratum plani AB, maiorem habet proportionem, quam G, ad I; & per conuerſionem rationis, planoplanum ABOP, ad exceſſum eiuſdem ſuprà quadratum plani AB, minorem habet proportionem, quàm G, ad D; habet autem exceſſus planoplani ABO P, ſupra quadratum plani A B, ad exceſſum planorum O P, A B, proportionem eamdem, quàm planum A B, ad vnitatem; vel eamdem, quàm vnitas ad vnitatem denominatam plano A B; vel (diuidendo per duplum C,) eamdem, quàm vnitas denominata duplo C, ad vnitatem denominatam ſolido ſub duplo C, & AB, videlicet ad G; ergo ex æquali in perturbata planoplanum ABOP, ad exceſſum planorum O P, A B, minorem habet proportionem, quàm vnitas denominata duplo C, ad D; & conuertendo exceſſus planorum O P A B, ad planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem denominatam duplo C; eſt autem aggregatum intermediorum numerorum Arithmeticè diſpoſitorum inter A, P, ad exceſſum planorum O P, A B, vt vnitus ad duplum C; vel vt vnitas denomina-

Pr. 25. 2.

Pr. 3. 2.

ta duplo C, ad vnitatem; ergo ex æquali in perturbata aggregatum intermediorum inter A, P, ad planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem; & aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano A B O P, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quàm D, ad eamdem vnitatem; Ergo aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planoplano ABOP, maius eſt quàm D:



quot autem ſunt inter A, P, intermedij, totidem aſſumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum diſpoſitæ, & aggregatæ ſunt in D; quarum aſſumptarum aggregatum ſit R: conſtat R, eſſe partem, vel portionem ipſius D; & conſtat etiam R, eſſe æqualem aggregato intermediorum A, P, denominato per planoplanum A B O P; ergo R, eſt maius D, pars toto, quod eſt abſurdum: non ergo D, eſt minor G, neque maior; ergo D, eſt æqualis ipſi G. Quod, &c.

Pr. 42.

Theor.

Theor. 26. Prop. 28.

Vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmeticè dispositorum, quotlibet assumptæ ad succedentes in infinitum sunt, vt excessus plani, qui fit à maximis numeris adhibitus in denominatione assumptarum supra planum, qui fit à minimis, ad idem planum à minimis contentum.

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
F. $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ G. ————————

NVmerorum Arithmeticè dispositorum sint A, B, minimi cum excessu E; & sint F, quotlibet assumptæ, & aggregatæ vnitates denominatæ solidis numerorum dispositorum Arithmeticè ab A, B; & in ipsarum F, denominatione sint adhibiti numeri C, D, maximi; & ipsis F, succedentes in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint G. Dico F, ad G, esse vt excessus planorum CD, AB, ad planum AB. Quoniam F, sunt æquales aggregato intermediorum Arithmeticè dispositorum inter A, D, denominato per planoplanum AB CD; & G, sunt æquales vnitati denominatæ solido sub duplo E, & plano CD; igitur F, ad G, sunt vt aggregatum intermediorum inter A, D, denominatum planoplano

Pr. 4. 2.
Pr. 27. 2.

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.

F. $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{440}$ $\frac{1}{1232}$ G. ——————

noplano A B C D, ad vnitatem denominatam solido sub duplo E, & plano CD; & multiplicando per planum C D, sunt vt aggregatum intermediorum A, D, denominatum plano A B, ad vnitatem denominatam duplo E; & multiplicando per duplum E, vt excessus
Pr. 3. 2. planorum C D, A B, (est enim excessus huiusmodi multiplex aggregati intermediorum inter A, D, vt duplum E, vnitatis) denominatus plano A B, ad vnitatem; & multiplicando etiam per planum AB, sunt F, ad G, vt excessus planorum CD, AB, ad planum AB. Quod, &c.

Finis Libri Secundi.

NOVAE

NOVÆ QVADRATVRÆ ARITHMETICÆ, SEV De Additione Fractionum

LIBER TERTIVS,

In quo eorum, quæ ſuperioribus Libris demonſtrata ſunt, generaliora traduntur principia.

Theorema 1. Propoſitio 1.

Diſpoſitis quomodolibet magnitudinibus, vt aſſumptis totidem ſemper ſecundum aliquem numerum, ſingulæ excedant ſingulas præcedentes pariter totidem ſumptas ordinis eiuſdem; ex denominatione huiuſmodi exceſſuum magnitudinum ordinis eiuſdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum ſunt exceſſus, tùm etiam ex inter-

medijs

medijs, fiunt fractiones, quarum aggregatum est excessus productorum totidem laterum ab extremis hinc inde, denominatus per productum dupli numeri laterum ab ijsdem extremis.

A—B—C—D—E—F—G—H—
I—K—L—M—N— P—
Q—R—S—T—X—Y—

DIspositis quomodolibet magnitudinibus A, B, C, D, E, F, G, vt assumptis totidem semper secundum aliquem numerum, vtpote singulæ D, E, F, superent singulas totidem sumptas præcedentes A, B, C, & similiter E, F, G, superent B, C, D, & sic deinceps; ex denominatione excessus D, A, per productum earumdem excedentium D, A, & intermediarum B, C, fiat fractio I; & similiter ex denominatione excessuum E, B; F, C; G, D; H, E, per productos B C D E, CDEF, DEFG, EFGH, fiant fractiones K, L, M, N; & quot sunt A, B, C, vel D, E, F, &c. totidem sint extremæ maximæ F, G, H; & minimæ A, B, C; & ex denominatione excessus producti extremarum hinc inde F G H, ABC, per productum omnium earumdem extremarum ABCF GH, fiat fractio P. Dico I, K, L, M, N, aggregatas æquales esse P. Ex totidem semper consequentibus A B C, BCD, &c. fiant producti Q, R, S, T, X, Y: quoniam Q, est productum ABC; & R, productum BCD; planum QR, est productum ex productis ABC, BCD; ergo A, D, & productus A B C D, sunt homologi rationis eiusdem laterum Q, R, & eorumdem laterum plani

QR,

QR; ergo exceſſus D, A, ad productum ABCD, eſt vt exceſſus R, Q, ad planum QR; ergo exceſſus D, A, denominatus producto ABCD, videlicet fractio I, eſt æqualis exceſſui R, Q, denominato plano QR: ſimiliter demonſtrabimus K, L, M, N, æquales exceſſibus S, R; T, S; X, T; Y, X, denominatis planis RS, ST, TX, XY; ergo colligendo I, K, L, M, N, ſunt æquales exceſſibus conſequentium Q, R, S, T, X, Y, denominatis eorumdem conſequentiũ planis; videlicet vni exceſſui extremorum Y, Q, denominato eorumdem extremorum plano QY: eſt autem Y, productum FGH; & Q, productum ABC; ergo exceſſus Y, Q, denominatus plano QY, eſt æqualis exceſſui productorum FGH, ABC, denominato producto ABCFGH, videlicet fractioni P: ergo I, K, L, M, N, compoſitæ, & aggregatæ ſunt æquales P. Quod, &c. Pr. 7. 1.

Theor. 2. Prop. 2.

Diſpoſitis Arithmeticè magnitudinibus, exceſſus producti quotlibet laterum à maximis extremis, ſuprà productum totidem laterum à minimis extremis, ad aggregatum productorum numeri laterum vnitate minoris factorum ab iiſdem diſpoſitis conſequentibus, præter primam, & vltimam, habet proportionem compoſitam, tùm exceſſus diſpoſitionis, tùm etiam numeri multi-

tudinis

tudinis laterum productorum excedentium ad vnitatem.

A—B—C—D—E—F—G—H—

SInt Arithmeticè diſpoſitæ quotlibet magnitudines A, B, C, D, E, F, G, H; & à maximis extremis fiat productum trium laterum FGH; & à minimis extremis productum totidem laterum A B C. Dico exceſſum productorum F G H, A B C, ad aggregatum productorum duorum laterum, qui fiunt à conſequentibus, præter primam, & vltimam A, H, videlicet ad compoſitum ex planis BC, CD, DE, EF, FG, habet proportionem compoſitam, tùm exceſſus B, A, tùm etiam ternarij numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Sit E, in diſpoſitione propoſita proxima minor F: quoniam exceſſus H, E, ad exceſſum B, A, eſt vt 3. multitudo numerorum F, G, H, ad vnitatem; addita communi proportione exceſſus B, A, ad vnitatem, ergo exceſſus H,E, ad vnitatem habet proportionem compoſitã, tùm exceſſus B, A, tùm ternarij ad vnitatem: ducatur E, in proximas maiores magnitudines F, G, vt fiat EFG, productus totidem laterum, quot eſt FGH; ergo planum FG, ad productum EFG, eſt vt vnitas ad E; eſt autem productus EFG, ad productum FGH, vt E, ad H; & diuidendo, productus EFG, ad exceſſum productorum F G H, EFG, vt E, ad exceſſum H, E; ergo ex æquali planum FG, ad exceſſum productorum FGH, EFG, eſt vt vnitas ad exceſſum H, E; & conuertendo, exceſſus productorum F G H, E F G, ad planum F G, eſt vt exceſſus H, E, ad vnitatem: ſimiliter demonſtrabimus, quòd ſinguli exceſſus productorum EFG, DEF, CDE, BCD, ABC, ad ſingula plana EF, DE, CD, BC, AB, ſunt vt

exceſſus

excessus H, E, ad vnitatem: ergo colligendo, excessus productorum FGH, ABC, ad aggregatum planorum AB, BC, CD, DE, EF, FG, est vt excessus H, E, ad vnitatem; videlicet proportionem habet compositam, tùm excessus B, A, tùm etiam numeri multitudinis laterum F, G, H, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Dispositis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem semper consequentium, sunt æquales aggregato productorum numeri laterum binario minoris, factorum ab ijsdem dispositis consequentibus, præter primam, & vltimam, denominato per planum sub duobus totidem hinc inde extremarum productis numeri laterum vnitate minoris.

A —	B —	C —	D —	E —	F —	G —	
	H —	I —	K —	L —			M —
	N —	O —	P —	Q —			R —

Sint dispositæ Arithmeticè magnitudines quotcunq; A, B, C, D, E, F, G; & vnitates denominatæ productis earumdem (ex.gr.) quaternarum sint H, I, K, L; & aggregatum productorum ex binis ijsdem, præter primam A, & vltimam G, denominatum per planum sub

A — B — C — D — E — F — G —
H — I — K — L — M —
N — O — P — Q — R —

duobus ternorum laterum hinc inde extremorum productis ABCEFG, fit M. Dico, quod H, I, K, L, sunt æquales M. Sumantur A, B, C, D, E, F, G, ternæ; & singularum, quæ ternæ sumuntur excessus supra singulas præcedentes denominentur productis earumdem, quarum sunt excessus, & intermediarum (qui producti sunt singuli quaternorum laterum) vt fiant fractiones N, O, P, Q, & excessus productorum à ternis hinc inde extremis EFG, ABC, denominatus omnium earumdē extre-
Pr. 1.3. morum producto ABCEFG, fit R; ergo N, O, P, Q, sunt æquales R: & quia N, O, P, Q, singuli sunt excessus earum, quæ ternæ sumuntur denominati productis quaternarum (vt excessus D, A, denominatus producto AB CD,) & H, I, K, L, singulæ sunt vnitates denominatæ similiter; ergo singuli N, O, P, Q, ad singulas H, I, K, L, sunt vt excessus D, A, ad vnitatem; videlicet proportionem habent compositam excessus D, A, ad excessum consequentium B, A, & huius ad vnitatem: est autem excessus D, A, ad excessum B, A, vt 3. ad vnitatem; ergo excessus D A, ad vnitatem habet compositam proportionem tùm excessus B, A, tùm etiam 3. ad vnitatem:
Pr. 2 3. quæ composita eadem est proportioni excessus productorum trium laterum ab extremis factorum EFG, ABC, ad aggregatum productorum ex binis ijsdem, præter A, G; & (diuidendo per productum omnium extremarum A B C E F G,) eadem est proportioni R, ad M: ergo singulæ magnitudines N, O, P, Q, ad singulas H, I, K, L, sunt vt R, ad M; & colligendo omnes, N, O, P, Q, ad omnes H, I, K, L, sunt vt R, ad M; & permutando,

do, quia N, O, P, Q, ſunt æquales R; etiam H, I, K, L, ſunt æquales M. Quod, &c.

Theor. 4. Propoſ. 4.

Diſpoſitis Arithmeticè quotlibet magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem ſemper in diſpoſitione, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterũ eiuſdem producti, tùm etiam ad exceſſum diſpoſitionis Arithmeticæ.

B —— C —— D —— —— E —— F —— G ——
A ———————————————— H ——

SInt diſpoſitæ Arithmeticè quotlibet magnitudines, quarum B, C, D, minimæ; & E, F, G, maximæ, cum exceſſu H; & vnitates denominatæ productis quatuor ſemper laterum ſint A. Dico, quòd A, ſunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compoſitam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum B, C, D, tùm etiàm ad H. Quoniam B, C, D, &c. ſunt Arithmeticè diſpoſitæ, ergo A, ſunt æquales aggregato productorum duorum ſemper laterũ ex ipſis diſpoſitis præter B, G, denominato per planum Pr. 3. 3.

 ex

B —— C —— D —— —— E —— F —— G ——
A ———————————————————— H —

ex productis trium laterum BCD, EFG: ergo A, ad vnitatem sunt vt aggregatum productorum duorum semper laterum ex dispositis præter B, G, ad planum ex productis trium laterum BCD, EFG; videlicet proportionem habent compositam dicti aggregati productorum duorum laterum à consequentibus præter B, G, ad differentiam productorum trium laterum ab extremis EFG, BCD, & huiusmodi differentiæ ad eorumdem productorum

Pr. 2.3. planum BCDEFG; aggregatum autem productorum duorum laterum à consequentibus ad differentiam productorum trium laterum ab extremis proportionem habet compositam vnitatis tùm ad 3. numerum laterum BCD, tùm etiam ad H; ergo A, ad vnitatem habent proportionem compositam vnitatis tùm ad 3. tùm ad H, & differentiæ productorum EFG, BCD, ad productum

Pr. 25.2. BCDEFG: quoniam autem productum BCDEFG, maius est quàm vt ad differentiam productorum EFG, BCD, eamdem habeat proportionem, quam productus BCD, ad vnitatem; conuertendo, differentia productorum EFG, BCD, ad productum BCDEFG, minorem habet proportionem, quàm vnitas ad productum BCD; ergo (addendo communem proportionem compositam vnitatis tùm ad 3. tùm etiam ad H,) A, sunt minores, quàm vt ad vnitatem habeant proportionem compositam vnitatis tùm ad productum BCD, tùm ad 3. numerum laterum BCD, tùm etiam ad H. Quod, &c.

Corol-

Corollarium Primum.

Vnde constat, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè dispositarũ, quotlibet assumptæ sunt minores vnitate denominata solido sub producto à minimis numeri laterum vnitate minoris, sub eodem laterum numero, & sub excessu dispositionis.

Corollarium Secundum.

Constat præterea, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè ordinatarum, in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt extensionis finitæ. Pr. 15. 1.

Corollarium Tertium.

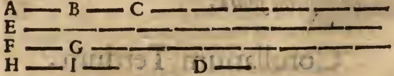
Manifestum tandem est, quòd vnitates, quæ denominantur productis totidem semper Pr. 16. 1.

magni-

magnitudinum Arithmeticè ordinatarũ, in aliqua multitudine sunt à prima, quæ propositam implent extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.

Theor. 5. Prop. 5.

Dispositis Arithmeticè magnitudinibus, vnitates denominatæ productis totidem semper in dispositione, ordinatæ in infinitum, & compositæ ad vnitatem habent proportionem compositam vnitatis tùm ad productum ex minimis numeri laterum vnitate minoris, tùm ad numerum laterùm eiusdẽ producti, tùm etiam ad excessum dispositionis Arithmeticè.



MAgnitudinum Arithmeticè dispositarũ in infinitum sint minimæ ABC, & excessus D; vnitates autem denominatæ productis quatuor semper laterum ordi-

ordinentur, & aggregentur in E. Dico, quod E, ad vnitatem habet proportionem compositam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3. numerum laterum ABC, tùm etiam ad excessum D. Aliàs E, maior, est vel minor, quàm vt ad vnitatem habeat tamdem proportionē compositam: sit maior; & sit excessus F; & ab E, deducto F, relinquatur G; ergò G, ad vnitatem habet prædictam proportionem compositam: quoniam E, maior est G; ergo in aliqua multitudine sumptæ à prima magnitudines in E, dispositæ implent G: sit huiusmodi multitudinis numerus H; qui adiecta vnitate fiat I; ergo magnitudines in E, dispositæ sumptæ in multitudine I, sunt maiores G; videlicet sunt maiores, quàm vt ad vnitatē habeant prædictam proportionem compositam; quod est absurdum: ergo E, non est maior, quàm vt ad vnitatem habeat proportionem compositam vnitatis tùm ad productum A B C, tùm ad 3. numerum laterum A B C, tùm etiam ad excessum D.

Coroll. 3. prop. 4. 3.
Def. 10.
Coroll. 1. prop. 4. 3.

A —— B —— C —— —— O —— P —— S ——
E —— —— —— —— —— —— —— —— —— F ——
G —— —— —— —— —— —— —— —— —— ——
Q —— —— M —— —— N —— R —— —— D ——

Sit E, minor G; & sit defectus F; & vt F, ad G, ità fiat producti A B C, quadratus ad Q; & ex diuisione Q, per productum ABC, fiat quotiens M; & magnitudinis M, tamquàm producti totidem laterum æqualium, quot sunt A B C, latus inueniatur, vtpote radix cubica, quæ sit N; & inter magnitudines Arithmeticè dispositas inueniantur tres, vel quot sunt A, B, C, totidem magnitudines consequentes O, P, S, maiores prædicta radice N: ergo productum O, P, S, maius est producto totidem laterum æqualium ipsi N, videlicet magnitudine

gnitudine

A —— B —— C ——— O —— P —— S ——
E ——————————————— F ——
G ————————————————
Q ———— M ——— N —— R ——— D —

gnitudine M; & multiplicando per productum ABC, productum ABCOPS, maius est producto ABCM, videlicet Q; est autem Q, ad quadratum producti ABC, vt G, ad F; ergo productum ABCOPS, ad quadratum producti ABC, maiorem habet proportionem, quam G, ad F; & per conuersionem rationis, productum ABCOPS, ad excessum eiusdem supra quadratum producti ABC, minorem habet proportionem, quàm G, ad E; habet autèm excessus producti ABCOPS, supra quadratum producti ABC, ad excessum productorum OPS, ABC, proportionem eamdem, quam productus ABC, ad vnitatem; qua communi adiecta, productus ABCOPS, ad excessum productorum OPS, ABC, minorem habet proportionem, quàm composita G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem; sed excessus productorum OPS, ABC, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium inter Arithmeticè dispositas præter A, S, habet proportionem compositam tùm 3. numeri laterum ABC, tùm etiam excessus D, ad vnitatem; qua etiam communi adiecta, productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, habet minorem proportionem, quàm composita G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem, necnon composita tùm numeri 3, tùm etiam excessus D, ad vnitatem; & est composita tùm producti ABC, tùm numeri 3. tùm etiam excessus D, ad vnitatem æqualis proportioni vnitatis ad G; quæ composita proportioni G, ad E, facit proportionem vnitatis ad E; ergo productus ABCOPS, ad

Pr.25.2. (margin, beside "bet autèm excessus producti ABCOPS")
Prop.2.3. (margin, beside "cti ABC, ad vnitatem")

ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, habet minorem proportionem, quàm vnitas ad E: sed productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, est vt vnitas ad aggregatum productorum duórum laterum consequentium præter A, S, denominatum producto ABCOPS, quæ quidem fractio vocetur R; ergo vnitas ad R, habet minorem proportionem, quàm ad E; & propterea R, est maior E: tandem quot sunt producti duorum laterum consequentium præter A, S, totidem assumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum ordinatæ sunt, & compositæ in E: constat R, esse aggregatum huiusmodi assumptarum; & propterea R, esse portionem extensionis E, maiorem, minoris; quod est absurdum: non ergo E, minor est, neque maior; ergo idem est, quod ad vnitatem habet proportionem compositam vnitatis tùm ad productum ABC, tùm ad 3. numerum laterum A B C, tùm etiam ad excessum D. Quod, &c. Prop.1.3.

Theor. 6. Prop. 6.

In facta dispositione continua magnitudinum procedentium in infinitũ, differentiæ denominatæ planis dispositæ, & aggregatæ infinitæ sunt æquales vnitati denominatæ magnitudine, quæ est principium dispositionis.

Sit dispositio continua magnitudinum procedentium in infinitum ab A; & differentiæ denominatæ planis

A ——————————————— C ———
B ——————————————————— F ——
D —— E —— G —— H ——

in huiusmodi dispositione ordinentur in infinitum, & componantur in B. Dico quòd B, sunt æquales vnitati denominatæ per A. Sunt enim B, extensionis finitæ: nam assumptis quotlibet à prima, & in denominatione vltimæ assumptarum adhibita C, vna ex dispositis ab A: Pr. 7. 1. constat assumptas æquales esse differentiæ C, A, denominatæ plano CA; & ad vnitatem se habere vt differentia C, A, ad planum CA; & conuertendo, vnitatem esse ad assumptas vt planum CA, ad differentiam C, A: sed maiorem habet proportionem planum CA, ad differentiam C, A, quàm A, ad vnitatem; vel maiorem quàm vnitas ad vnitatem denominatam per A; ergo unitas ad assumptas maiorem habet proportionem quàm ad unitatem denominatam per A; & propterea quotlibet as- Pr. 15. 1. sumptæ sunt minores vnitate denominata per A: ergo B, sunt extensionis finitæ. Igitur si B, non sunt æquales vnitati denominatæ per A, necessariò maiores erunt, vel minores: ponantur maiores; & quoniam B, sunt exten- Pr. 16. 1. sionis maioris vnitate denominata per A; sumi possunt in aliqua multitudine à prima, vt impleant vnitatem denominatam per A; sit huiusmodi multitudinis numerus Def. 10. D, qui adiecta vnitate fiat E; ergo B, sumptæ in multitudine numeri E, sunt maiores vnitate denominata per A; quod est contra ea, quæ superius demonstrata sunt: non ergo B, sunt maiores vnitate denominata per A.

Supponantur minores; & sit defectus F; & ut F, ad unitatem denominatam per A, ita fiat A, ad G; & inter numeros dispositos ab A, inueniatur C, numerus maior G; ergo C, ad A, maiorem habet proportionem quàm

G, ad

G, ad A; uel quàm unitas denominata per A, ad F; & per conuerſionem rationis, & conuertendo, exceſſus C, A, ad C, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem denominatam per A; ſed C, ad planum AC, eſt ut unitas ad A, uel ut unitas denominata per A, ad unitatem; ergo ex æquali exceſſus C, A, ad planum AC, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem: eſt autẽ exceſſus C, A, ad planum A C, ut exceſſus C, A, denominatus plano A C, ad unitatem; ergo exceſſus C A, denominatus plano AC, ad unitatem habet maiorem proportionem, quàm B, ad unitatem: Aſſumantur ex fractionibus diſpoſitis in B, tot ut inter aſſumptas habeatur ea, in cuius denominatione adhibetur magnitudo C; & aſſumptarum ſit aggregatum H: conſtat H, eſſe portionem B; & eſſe æqualem exceſſui C, A, denominato plano AC; & propterea H, ad unitatem habere proportionem maiorem quàm B; & H, maiorem eſſe B, partem toto; quod eſt abſurdum: non ergo B, ſunt minores unitate denominata per A; ſed neque maiores: ergo B, ſunt æquales unitati denominatæ per A. Quod, &c. Pr.7.1.

Theor. 7. Prop. 7.

Diſpoſitis quomodolibet magnitudinibus procedentibus in infinitum, vt aſsumptis totidem ſemper ſecundùm aliquem numerum ſingulæ excedant ſingulas præcedentes pariter totidem ſumptas ordinis eiuſdem; ex denominatione huiuſmodi exceſſuum ma-

gnitudinũ ordinis eiusdem per productum tùm ex magnitudinibus, quarum sunt excessus, tùm etiam ex intermedijs fiunt fractiones, quæ in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt æquales vnitati denominatæ producto totidem magnitudinum, quæ sunt in principio dispositionis.

A. B — C — D — E — — — O — P — R — S —
F ———
I. G — H ——— V ——
K ———

SIt A, dispositio magnitudinnm in infinitum procedentium, ut sumptis exempli gratia ternis quibuslibet, singulæ excedant singulas præcedentes ordins eiusdem; & sint primæ tres B, C, D; & quarta sequens E; & sit F, dispositio infinitarum fractio num, in quibus prædicti excessus denominantur productis ex magnitudinibus tùm excedentibus, tùm intermedijs; quarum fractionum prima est excessus E, B, denominatus producto BCDE. Dico quod F, æqualis est unitati denominatæ producto BCD. Est enim F, extensionis finitæ: nam assumptis in F, quotlibet à prima in denominatione ultimæ assumptarum adhibeantur O, P, R, S, magnitudines in A, dispositæ; & ex ternis consequentibus BCD, CDE, alijsq; deinceps dispositis in A, utpote etiam ex PRS, fiant producti G, H, & deinceps alij, vtpote etiam V;
Pr. 1.3. quorum dispositio in infinitum sit I; constat assumptas æquales esse differentiæ V, G, denominatæ plano V, G, & ad vnitatem se habere vt differentia V, G, ad planum GV;

G V; & conuertendo, vnitatem esse ad assumptas vt planum GV, ad differentiam V, G: sed maiorem habet proportionem planum GV, ad differentiam V,G, quàm G, ad vnitatem; vel quàm vnitas ad vnitatem denominatam per G; ergo vnitas ad assumptas maiorem habet proportionem quàm ad vnitatem denominatam per G; & propterea quotlibet assumptæ sunt minores vnitate denominata per G: ergo F, est finitæ extensionis. Præterea differentiæ denominatæ planis in I, disponantur in serie K; quarum prima est excessus H, G, denominatus plano GH: & quoniam magnitudines A, procedunt in infinitum; etiam producti earumdem I, procedunt in infinitum; ergo K, est extensionis finitæ; & æqualis est vnitati denominatæ per G: & cum G, sit productum B, in CD; & H, productum E, in C D; erit planum GH, productum B C D E, in C D: ergo G H, & planum G H, sunt homologa rationis eiusdem B, E, & producti BCDE: ergo excessus H, G, ad planum G H, est vt excessus E, B, ad productum BCDE; & fractio, in qua excessus H, G, denominatur plano G H, videlicet prima dispositarum in K, æqualis est fractioni, in qua excessus E, B, denominatur producto BCDE, videlicet primæ dispositarum in F: similiter demonstrabimus easdẽ singillatim magnitudines tùm in K, tùm in F, esse dispositas; & sunt ambæ dispositiones K, & F, extensionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & F, congruunt inter se: cum ergo K, sit æqualis vnitati denominatæ G, videlicet producto B C D; etiam F, est æqualis vnitati denominatæ producto B C D. Quod, &c.

Pr. 25. 1.
Pr. 15. 1.
Pr. 6. 3.
Ax. 2.

*

Probl.

Probl. 1. Prop. 8.

Datis extremis inæqualibus, intermediam inuenire, cuius, & vnius extremarum differentia plano denominata sit æqualis alij datæ magnitudini, quæ sit minor differentia extremarum plano denominata.

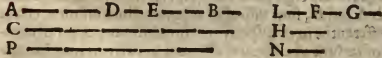
A. 8. G. 7. B. 3. E $\frac{1}{7}$ F. 1 $\frac{1}{7}$

D. $\frac{1}{56}$ H. $\frac{4}{21}$ C. $\frac{5}{24}$

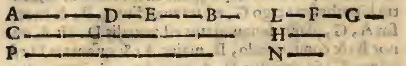
DAtæ ſint inæquales extremæ A, B; quarum differentia plano denominata ſit C; & data ſit alia magnitudo D, minor C. Opportet extremas A, B, intermediam ihuenire; cuius, & A, differentia plano denominata ſit æqualis D. Vel eſt A, maior B; vel minor: ſit maior; & ex multiplicatione DA, fiat E; qui auctus vnitate ſit F; & per F, diuidendo A, fiat quotiens G. Dico, quòd G, eſt intermedia A, B, & quod exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D. Quoniam G, multiplicando F, producit A; & multiplicando aggregatum E, & vnitatis producit aggregatū plani GE, & G; eſt autem F, æqualis E, & vnitati; igitur A, eſt æqualis plano GE, & G; & A, eſt maior G; ergo communi ablata G, exceſſus A, G, eſt æqualis plano GE; & diuidendo per G, exceſſus A, G, denominatus per G, eſt æqualis E; videlicet plano DA; & diuidendo per A, exceſſus A, G, plano denominatus eſt æqualis D: non eſt autem G, æqualis, neque minor B; nam exceſſus A, G, plano denominominatus, videlicet D, æqualis esset vel maior C, contrà hipothesim; ergo G, est intermedius A, B; & excessus A, G, plano denominatus est æqualis D. Sit A, minor B; & conuertendo, B, maior A; & quoniam D, est minor C; sit defectus H, & inueniatur E, intermedius B, A, vt excessus B, E, plano denominatus æqualis fiat H: quoniam A, E, B, sunt magnitudines continuè dispositæ; aggregatum differentiarum A, E; E, B, planis denominatarum est æquale C; videlicet aggregato D, H; est autem differentia E, B, plano denominata æqualis H; ergo residua differentia, videlicet defectus A, E, plano denominatus est æqualis D. Quod, &c.

Theor. 8. Prop. 9.

In continua dispositione magnitudinum infinitarum inter extremas quaspiam magnitudines ab vna ad alteram procedentium, differentiæ planis denominatæ dispositæ in infinitum, & aggregatæ, sunt æquales vni differentiæ extremarum plano denominatæ.



Sint dispositæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua dispositione procedentes inter extremas



mas A, B, ab A, quæ sit in principio dispositionis ad B;
& infinitæ differentiæ planis in dispositione denominatę
aggregentur in C; & sit L, differentia A, B; & ex deno-
minatione L, per planum A B, fiat H. Dico, quòd C,
est æqualis H. Est enim C, extensionis finitæ: nam as-
sumptis in C, quotlibet à prima in denominatione vlti-
mæ assumptarum adhibeantur D, E, magnitudines inter
Prop.7.1. A, B, dispositæ: constat, quòd assumptæ sunt æquales
Prop.7.1. differentiæ denominatæ plano AE; est autem differentia
denominata plano AE, vnà cum differentia denominata
plano E B, æqualis H; ergo differentia denominata pla-
no A E, minor est H; & propterea quotlibet assumptæ
Pr.15.1. sunt minores H: igitur C, est finitæ extensionis. Iam si
C, non est æqualis H, necessariò maior erit, vel minor:
sit maior; & quoniam C, est maioris extensionis H; su-
mi possunt ex magnitudinibus dispositis in C, aliquot à
prima, vt impleant H: sumantur, & sit ipsarum multi-
Def.10. tudinis numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C,
sumptæ à prima in multitudine numeri G, sunt maiores
H; quod est contrà superius demonstrata: non est ergo
C, maior H. Sit minor; & inueniatur D, intermedia
extremas A, B; vt differentia A, D, plano denominata sit
Prop.8.3. æqualis C; ergo differentia A, D, est minor L: & quoniã
ab A, ad B, sunt dispositæ magnitudines infinitæ; etiam
differentiæ in ea dispositione sunt infinitæ; & simul com-
positæ sunt æquales vni differentiæ extremarum L; ergo
vel prima ex huiusmodi differentijs est maior differentia
Pr.16.1. A, D; vel si minor plures à prima sumptæ secundùm ali-
quem numerum impleņt differentiam A, D; qui numerus

vnitate

vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in diſpoſitione A, ad B, ſumptæ à prima ſecundùm numerũ N, ſunt maiores differentia A, D: ſumantur igitur ſecundùm numerum N, magnitudines ab A, diſpoſitæ ad B, præter A; & aſſumptarum ſit vltima E; totidemque ſumantur ex fractionibus diſpoſitis in C; quarum aggregatum ſit P: conſtat P, eſſe portionem ipſius C; & differentiam A, E, maiorem differentia A, D; & propterea differentiam A, E, plano denominatam, videlicet P, eſſe maiorem differentia A, D, plano denominata, videlicet C; ergo portio eſt maior toto; quod eſt abſurdum: non eſt ergo C, minor H; ſed neque maior: ergo C, eſt æqualis H. Quod, &c. Prop. 7. 1.

Theor. 9. Propoſ. 10.

In continua diſpoſitione magnitudinum infinitarum inter extremas à prima ad vltimam procedentium, differentiæ illarum, quæ diſtant æquali ordinis interuallo denominatæ productis tùm earumdem, quarum ſunt differentiæ, tùm etiam intermediarum, diſpoſitæ in infinitum, & aggregatæ ſunt æquales differentiæ inter productum numeri laterum vnitate minoris ab ijs, quæ ſunt in principio diſpoſitionis, & homogeneam poteſtatem ab vltima, denominatæ plano ſub ijſdem producto, & poteſtate.

 Sint

A — I — K — M — O — S — T — D — E —— B —
C ——————————————————————————
L —— F —— G —— H ——
Q. V ——————————— X — Z ——— R —
Y —— N —— P ——————

SInt diſpoſitæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua diſpoſitione procedentes inter extremas A, B, ab A, I, K, M, O, quæ ſint in principio diſpoſitionis ad B; & infinitæ differentiæ illarum, quæ diſtant æquali ordinis interuallo, vtpote ſemper binis relictis differentiæ A, M; I, O, &c. denominatæ productis AIKM, IKMO, &c. aggregentur in C; & ſit Q, diſpoſitio productorum numeri laterum vnitate minoris AIK, IKM, KMO, &c. in qua quidem diſpoſitione ſit V, productum AIK; & R, poteſtas totidem laterum à B; differentia verò R, V, ſit L; ex cuius denominatione per planum RV, fiat H. Dico quod C, eſt æqualis H. Eſt enim C, extenſionis finitæ; nam aſſumptis in C, quotlibet à prima, in denominatione vltimæ aſſumptarū adhibeantur S, T, D, E, magnitudines inter A, B, diſpoſitæ; & in
Prop.1.3. diſpoſitione Q, ſint X, Z, producta STD, TDE: conſtat, quòd aſſumptæ ſunt æquales differentiæ denominatæ
Prop.7.1. plano VZ; eſt autem differentia denominata plano VZ, vnà cum differentia denominata plano ZR, æqualis H; ergo differentia denominata plano VZ, minor eſt H; & propterea quotlibet aſſumptæ à prima ex diſpoſitis in C,
Pr.15.1. ſunt minores H: igitur C, eſt finitæ extenſionis. Iam ſi C, non eſt æqualis H; neceſſariò maior erit, vel minor:
Pr.16.4. ſit maior; & quoniam C, eſt maioris extenſionis H; ſumi poſſunt ex magnitudinibus diſpoſitis in C, aliquot à prima, vt impleant H: ſumantur, & ſit ipſarū multitudinis
Def.10. numerus F; qui vnitate adiecta fiat G; ergo C, ſumptæ à prima in multitudine numeri G, ſunt maiores H, quod eſt

contrà

contrà ſuperiùs demonſtrata: nõ eſt ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur X, intermedia extremas V, R, vt differentia V, X, plano denominata ſit æqualis C; & intelligãtur V, X, eſſe poteſtates ipſi R, homogeneæ, quarũ radices inueniantur Y, S: quia V, eſt productus magnitudinũ inæqualium, & continuè diſpoſitarum A, I, K; conſtat quòd Y, eſt intermedia extremas A, K; & quia X, eſt intermedia extremas V, R; differentia V, X, eſt minor differẽtia, V, R; & differẽtia Y, S, minor eſt differẽtia Y, B; & ablata communi differentia Y, K; differẽtia K, S, minor eſt differentia K, B: & quoniã in diſpoſitione K, ad B, ſunt magnitudines infinitæ; etiam differentiæ ſunt infinitæ; & ſimul ſumptæ ſunt æquales vni differentiæ extremarum K, B; ergo vel prima ex huiuſmodi differentijs eſt maior differentia K, S; vel ſi minor, plures à prima ſumptæ ſecundum aliquem numerum implent differentiam K, S; qui numerus vnitate adiecta fiat N; ergo differentiæ in diſpoſitione K, ad B, ſumptæ à prima ſecundum numerum N, ſunt maiores differentia K, S: Sumantur ergo ſecundum numerum N, magnitudines à K, diſpoſitæ ad B, præter K; & aſſumptarum ſit vltima T; quam ſequantur aliæ duæ D, E; & in diſpoſitione Q, ſit Z, productum TDE; & quot ſunt magnitudines aſſumptæ à K, vſque ad E, totidem ſumantur ex fractionibus diſpoſitis in C, à prima; quarum aggregatum ſit P: conſtat P, eſſe portionem ipſius C; & differentiam K, T, eſſe maiorem differentia K, S; & addita communi differentia Y, K, differentiam Y, T, maiorem differentia Y, S; & propterea differentiam inter V, & homogeneam poteſtatem à radice T, maiorem differentia V, X; eſt autem differentia V, Z, maior differentia inter V, & homogeneam poteſtatem à radice T; ergo differentia V, Z, eſt multò maior differentia V, X, & ideò differentia V, Z, plano denominata maior eſt differentia V, X, plano denominata; videlicet

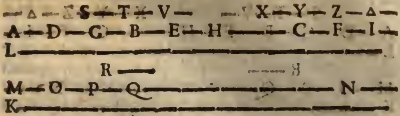
Prop.8.3. Pr.16.1. Def.10. Prop.7.1.

fractione C : est autem differentia V,Z, plano denominata æqualis P; ergo P, est maior C, portio toto; quod est absurdum: non est ergo C, minor H; sed neque maior: ergo C, est æqualis H. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

Si plures continuæ dispositiones, in quibus differentiæ sint similes, magnitudinum infinitarum ità componantur in vnica dispositione, vt quæ sunt ordinis eiusdem sint similiter ordinatæ; differentiæ in singulis dispositionibus eodem ordine sumptæ, cum ijs, quæ sunt in ipsarum dispositionum principijs, denominatæ productis tùm earumdem, quarum sunt differentiæ, tùm etiam intermediarum disposita in infinitum, & aggregatæ sunt æquales vni differentiæ productorum à primis, & ab vltimis extremis, eorumdem productorum plano denominatæ.

TRium continuarum dispositionum ex magnitudinibus infinitis inter binas extremas procedentium prima sit ab A, per B, ad C; secunda à D, per E, ad F; tertia à G, per H, ad I; in quibus differentiæ sint similes; & quæ



& quæ componantur in vna dispositione ab A, per D, G, B, &c. ad I, ità vt primæ A, D, G, secundæ B, E, H, & reliquæ deinceps ordinis eiusdem, necnon vltimæ C, F, I, sint similiter ordinatæ; & singularum dispositionum differentiæ denominatæ productis in huiusmodi composita dispositione (vtpote differentia A, B, denominata producto ADGB; & differentia D, E, producto DGBE; & sic deinceps in infinitum) disponantur, & colligantur in L; & à primis ADG, & vltimis CFI, producantur M, & N. Dico, quod L, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Est enim L, extensionis finitæ: nam assumptis in L, quotlibet à prima, in denominatione vltimæ assumptarum tres adhibeantur B, E, H, magnitudines inter A, I, dispositæ; & Q, sit productum BEH; & quoniam sunt continuæ dispositiones ABC, DEF, GHI; continua est etiam dispositio MQN; & differentia M, Q, minor est differentia M, N; & differentia M, Q, plano denominata minor est differentia M, N, plano denominata: est autem differentia M, Q, plano denominata æqualis quotlibet assumptis in L; igitur quotlibet assumptæ in L, sunt minores differentia M, N, plano denominata; ergo L, est finitæ extensionis. Inter M, N, disponantur homogenea producta in dispositione ab A, ad I, vt fiant O, P, Q, producta DGB, GBE, BEH; & deinceps infinita; & eadem demonstratione, qua ostendimus Q, esse intermedium M, N; ostenderemus etiam O, P, & Ex Dem. Prop. 1. 3. Prop. 7. 1. Prop. 1. 3. Pr. 15. 1.

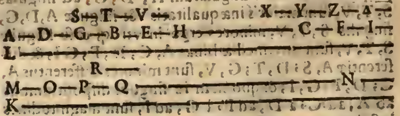
S — T — V — — X — Y — Z — Δ —
A — D — G — B — E — H — — C — F — I —
L ————————————————————
R ——
M — O — P — Q ———————— N ——
K ————————————————————

reliqua producta esse intermedia M, N; necnon O, P; esse intermedia M, Q; & sic dispositionem huiusmodi productorum inter M; N; esse continuam: sumatur præterea quælibet magnitudo R; inter M, N; & analogia (videlicet proportionum proportio) proportionis M; ad N; ad proportionem M; ad R; eadem esse concipiatur singularum proportionum A; ad C; D, ad F; & G; ad I; ad singulas proportiones A; ad S; D, ad T; & G, ad V; possibiles inueniri: & quoniam R, est inter M; N: si singulæ A, D, G, singulis C; F, I; sunt minores: ergo M; est minor N; & minor est proportio M, ad N; quàm M; ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I; sunt minores quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, maiores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, minoris inæqualitatis: ergo etiam proportiones singularum A, D, G, ad singulas S, T, V, sunt minoris inæqualitatis; & singulæ A, D, G, singulis S, T, V, minores. Si verò singulæ A, D, G, singulis C, F, I, sunt maiores: ergo M, est maior N; & maior est proportio M, ad N; quàm M, ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I; sunt maiores, quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, minores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, maioris inæqualitatis: ergo

Ex doctrina Logarithmorũ.

propor-

proportiones etiam singularum A, D, G, ad singulas S, T, V, sunt maioris inæqualitatis; & singulæ A, D, G, singulis S, T, V, minores ergo in vtroque casu singulæ S, T, V, sunt intermediæ binas A, C; D, F; G, I; & differentiæ A, S; D, T; G, V, sunt minores differentijs A, C; D, F; G, I; & quoniam in singulis dispositionibus ab A, ad C; à D, ad F; à G, ad I, sunt magnitudines infinitæ; etiam differentiæ sunt infinitæ; & simul compositæ singulis extremarum differentijs A, C; D, F; G, I; sunt æquales; ergo vel primæ differentiæ in singulis huiusmodi dispositionibus differentijs A, S; D, T; G, V; sunt maiores; vel si minores; plures à primis assumptæ secundum aliquos numeros implent differentias A, S; D, T; G, V; qui numeri singulis vnitatibus adiectis fiant X, Y, Z; quorum numerorum sit maximus Y; cuius fiat multiplex Δ, iuxta numerum magnitudinum A, D, G; ergo differentiæ in singulis dispositionibus A, ad C; D, ad F; G, ad I; sumptæ à primis iuxta singulos numeros X, Y, Z; sunt maiores differentijs A, S; D, T; G, V; & sumptæ iuxta numerum Y; sunt multò maiores ijsdem differentijs A, S; D, T; G, V; igitur sumantur secundum numerum Y, magnitudines ab A, dispositæ ad C; à D, ad F; à G, ad I; post ipsas A, D, G; & assumptarum sint vltimæ B, E, H; quæ cum sint ordinis eiusdem reperientur in dispositione ab A, ad I; consequentes; & post easdem A, D, G, in ordine numeri Δ, & aliorum deinceps numerorum, qui sunt proximè maiores ipso Δ; & pariter in dispositione productorum ab M, ad N; reperietur ipsorum BEH; productus Q, in eodem ordine numeri Δ, post M: quia singulæ differentiæ A, B; D, E; G, H, sunt singulis differentijs A, S; D, T; G, V; maiores; etiam differentia M, Q, maior est differentia inter M; & productum S T V: & quia singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, ad singulas propor-



ciones A, ad S; D, ad T; G, ad V; & colligendo omnes ad omnes eamdem habent analogiam (siue proportionum proportionem) quæ est proportionis M, ad N; ad proportionem M, ad R; permutandoque, & conuertendo, sicut proportio M, ad N, æqualis est proportionibus A, ad C; D, ad F; G, ad I; ita proportio M, ad R, æqualis est proportionibus A, ad S; D, ad T; G, ad V; videlicet proportioni M, ad productum STV: ergo R, est æqualis producto STV; & differentia M, Q, major est differentia M, R; ergo dispositio productorum M, O, P, Q, est continua magnitudinum infinitarum procedentium ab M, ad N: in continua ergò dispositione magnitudinum infinitarum inter extremas quaspiam magnitudines ab M, ad N, procedentium, differentiæ planis denominatæ disponantur in infinitum, & aggregentur in
Prop. 9. 3 K; ergo K, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ: & quoniam M, est productum A, in DG; & O, productum B, in DG; erit planum MO, productum AD GB, in DG; ergo M, O, & planum MO, sunt homologa rationis eiusdem A, B, & producti ADGB; ergo differentia M, O, ad planum MO, est vt differentia A, B, ad productum ADGB; & fractio, in qua differentia M, O, plano denominatur; videlicet prima dispositarum in K, est æqualis fractioni, in qua differentia A, B, denominatur producto ADGB; videlicet primæ dispositarum in L: similiter demonstrabimus easdem sin-

gillatim

gillatim magnitudines tùm in K, tùm in L, esse dispositas; & sunt ambæ dispositiones K, & L, extensionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & L, congruunt inter se: cum ergo K, sit æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ; etiam L, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Quod, &c. Ax. 1.

DEFINITIONES.

Exposita rationali, & datis quotlibet, si rationalis ad aliam, quæ inuenitur habeat proportionem compositam ex proportionibus eiusdem rationalis ad singulas datas; vocetur inuenta, productus datarum.

Et datæ lineæ, dicantur, latera, producti.

Exposita rationali, & datis duabus alijs magnitudinibus; si vt prima datarum ad rationalem, ita fiat secunda ad aliam, quæ inuenitur; vocetur inuenta, fractio facta ex denominatione secundæ per primã.

Et ipsa secunda magnitudo, numerator fractionis.

Prima verò, denominator.

Et exposita rationalis, vnitas appelletur.

Huiu-

Huiusmodi definitiones in Arithmetici voluminis calce appositas esse volui, vt faciliter quisq; possit Arithmetica Theoremata in Geometricos vsus conuertere, & demonstrationes in quantitate discreta expositas, in quantitate continua mutatis nominum interpretationibus adhibere.

Finis Libri Tertij.

Omnium calculis approbandam, immò albis signandam lapillis Arithmeticam hanc Speculationem censuit Ouidius Montalbanus librorum Mathematicorum pro Eminentiss & Reuerendiss Principe Archiepiscopo Bononiæ Card. Nicolao Ludouisio Censor.

V. D. Antonins Bon Vicinus Panit. pro eodem Eminentiss.

Bartholomæus Massarius Lib. Mathm. reuisor pro Reuerendiss. P. Inquisit.

Imprimatur
Fr. Vincentius Prætus à Serrauallle Inquisit. Bononiæ.

BONONIAE Typis Iacobi Montij. MDCL.
Superiorum permissu.

50